МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

XI

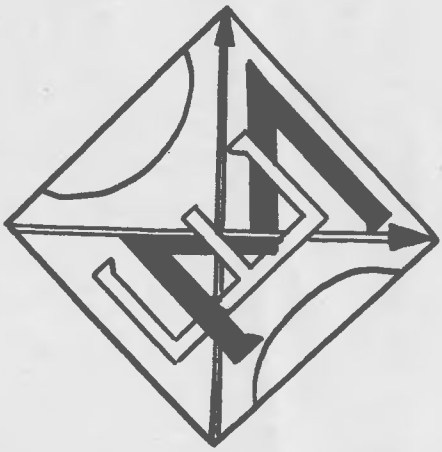
ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1967

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Московское математическое общество
Институт общего и политехнического образования
Академии педагогических наук

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

XI.



ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1967

В сборниках "Математическая школа" публикуются учебные материалы московских специализированных школ №№ 2,7, 444, школы интерната № 18 при МГУ и Вечерней математической школы при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе:

Э.Б.ВИНБЕРГ, Е.Б.ДЫНКИН, А.А.ЕГОРОВ, Т.И.КУЗНЕЦОВА, Ж.М.РАББОТ (зам.редактора), С.И.ШВАРЦБУРД (редактор), И.М.ЯГЛОМ.

Содержание

I.В школе № 2

Э.Б.ВИНБЕРГ. Лекции по геометрии ..... 3.

2. В интернате № 18

А.Б.СОСИНСКИЙ. Площади и длины в пространстве .32.

3. В Вечерней математической школе

А.Л.РОЗЕНТАЛЬ. Решение задач летнего цикла (7-8 классы) ..... 41.

М.И.КЛИОРИН, А.М.РУДАКОВ, Ж.М.РАББОТ, С.М.ГУСЕЙН-ЗАДЕ, И.В.ЕВСТИГНЕЕВ. Решение задачи I цикла для 8 классов ..... 51.

Конкурсные задачи ..... 70.

4. Материалы вступительных экзаменов .....80.

В ШКОЛЕ №2

ГЕОМЕТРИЯ (X КЛАСС).

Э.Б.Винберг.

ЛЕКЦИЯ №I.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

I. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:I , считая от вершины.

Путем сжатий и растяжений треугольник преобразуется в равносторонний.

2. Теорема Паскаля: точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой.

С помощью перспективного преобразования теорема приводится к следующей: если две пары противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника параллельны, то и третья пара параллельна.

3. Теорема Брианшона : диагонали описанного около окружности шестиугольника пересекаются в одной точке.

С помощью корреляции эта теорема приводится к теореме Паскаля.

Геометрия как изучение свойств фигур, не меняющихся при преобразованиях, принадлежащих заданной группе G.

Группой преобразований множества M называется всякая совокупность G преобразований этого множества, обладающая следующими свойствами:

1) тождественное преобразование ε принадлежит G,

2) вместе с каждым преобразованием γ в G содержится обратное преобразование γ^{-1},

3) вместе с любыми двумя преобразованиями γ_1, γ_2 в G содержится их произведение $\gamma_1\gamma_2$.

(Определение произведения преобразований: $(\gamma_1\gamma_2)(x) = \gamma_1(\gamma_2(x))$).

Фигуры $\Phi_1, \Phi_2 \subset M$ называются равными в геометрии группы G (запись: $\Phi_1 \underset{G}{=} \Phi_2$), если существует преобразование $\gamma \in G$, переводящее Φ_1 в Φ_2.

Благодаря условиям 1)- 3) равенство фигур обладает обычными свойствами равенства (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

Евклидова геометрия - это геометрия группы движений евклидова пространства.(Движением называется всякое преобразование, сохраняющее расстояние между точками .)

Аффинным преобразованием плоскости называется всякое преобразование, переводящее прямые в прямые и сохраняющее отношение отрезков, лежащих на одной прямой.

Такие преобразования образуют группу. Геометрия этой группы - аффинная геометрия.

ЗАДАЧИ.

I. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных им сторон со вписанной в треугольник окружностью, пересекаются в одной точке.

2. В треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB взяты соответственно точки M, N, P, причем

$\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{NC}$; $AP = PB$. Доказать, что прямые AM, BN и CP пересекаются в одной точке.

3. Доказать, что всякое движение плоскости есть либо сдвиг, либо поворот, либо отражение в прямой, либо скользящее отражение (т.е. произведение отражения в прямой и сдвига в направлении той же прямой).

4. Образуют ли группу преобразований плоскости:

а) все сдвиги;
б) все повороты,
в) все сдвиги и повороты ?

5. Доказать, что отношение площадей сохраняется при аффинных преобразованиях.

6. Доказать, что в аффинной геометрии все треугольники равны.

ЛЕКЦИЯ № 2

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Линейная часть $\bar{\gamma}$ аффинного преобразования γ определяется так:

$$\bar{\gamma}(\overline{AB}) = \overline{\gamma(A)\gamma(B)}$$

Это обратимое линейное преобразование пространства свободных векторов.

ТЕОРЕМА I. Пусть O – какая-нибудь точка плоскости. Для любой точки O' и любого обратимого линейного преобразования C существует единственное аффинное преобразование γ, для которого $\gamma(O) = O'$, $\bar{\gamma} = C$.

Запись аффинного преобразования в координатах:

$$\gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y + b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + b_2 \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования $\bar{\gamma}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – координаты точки, в которую переходит начало координат.

Кривые 2-го порядка.

Кривой 2-го порядка называется кривая, задающаяся уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Всякая кривая 2-го порядка, содержащая более одной точки и не являющаяся прямой или парой прямых, путем аффинного преобразования может быть переведена в одну из следующих кривых:

$$(1)\ x^2 + y^2 = 1, \quad (2)\ xy = 1, \quad (3)\ y = x^2.$$

Соответственно этим трем случаям данная кривая называется эллипсом, гиперболой или параболой.

Некоторые свойства эллипса:

I) существует точка, называемая центром эллипса, в которой делятся пополам все проходящие через нее хорды;

2) около эллипса можно описать прямоугольник , стороны которого делятся в точках касания пополам; половины длин его сторон называются полуосями эллипса.

ТЕОРЕМА 8. Всякое аффинное преобразование можно представить в виде произведения двух растяжений во взаимно-перпендикулярных направлениях и движения.

ЗАДАЧИ:

7. Доказать, что с помощью одной линейки (без делений) нельзя построить равностороннего треугольника.

8. Найти условие равенства двух четырехугольников в аффинной геометрии.

9. Доказать, что $\overline{\gamma_1 \gamma_2} = \overline{\gamma_1}\,\overline{\gamma_2}$ для любых аффинных преобразований γ_1 и γ_2 ($\overline{\gamma}$ обозначает линейную часть γ).

10. При помощи задачи 9 доказать, что произведение двух поворотов вокруг разных точек на противоположные углы есть сдвиг.

11. Найти условия на коэффициенты a_{ij}, b_i аффинного преобразования γ , необходимые и достаточные для того, чтобы γ было движением .

12. К какому типу принадлежат кривые 2-го порядка:

а) $x^2+xy+y^2+x+y=0$;

б) $2x^2+3xy-2y^2+2x-y=0$;

в) $x^2+4xy+4y^2+y+1=0$;

г) $2x^2-xy-y^2-3y+2=0$.

I3. Доказать, что гипербола, как и эллипс, имеет центр симметрии, а парабола - нет.

I4. Доказать, что полуоси эллипса - это половины наибольшей и наименьшей хорд.

I5. Доказать, что площадь эллипса с полуосями a и b равна πab .

I6. Доказать, что любой диаметр эллипса делит пополам все хорды, параллельные касательной, проведенной через один из его концов и что существует единственное не тождественное аффинное преобразование, переводящее эллипс в себя и оставляющее на месте все точки данного диаметра.

I7. Найти все аффинные преобразования, переводящие в себя данную кривую 2-го порядка.

I8. Доказать, что конические сечения являются кривыми 2-го порядка.

ЛЕКЦИЯ № 3

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Однородные и неоднородные координаты в проективной плоскости. Связь между ними:

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}.$$

ℓ

Проективное преобразование γ :

$$\gamma[a] = [\gamma(a)],$$

где $[a]$ – точка проективной плоскости, определяемая прямой a в трехмерном пространства R^3, проходящей через начало; γ в правой части – обратимое линейное преобразование пространства R^3.

При проективном преобразовании прямые переходят в прямые.

ЛЕММА I. Любая прямая с помощью проективного преобразования может быть переведена в бесконечно удаленную.

Запись проективного преобразования в координатах:

а) в однородных: $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta \\ a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{32}\zeta \\ a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta \end{pmatrix}$

б) в неоднородных: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}x + a_{21}y + a_{31}}{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}} \\ \dfrac{a_{12}x + a_{22}y + a_{32}}{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}} \end{pmatrix}$

Аффинное преобразование как частный случай проективного, когда $a_{13} = a_{23} = 0$, т.е. когда бесконечно удаленная прямая $\zeta = 0$ остается на месте.

Проективные преобразования образуют группу.

Четверка точек $\{A, B, C, D\}$ называется четверкой общего положения, если никакие 3 из них не лежат на одной прямой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$ - четверки общего положения. Тогда существует единственное проективное преобразование γ, переводящее A_1 в A_2, B_1 в B_2, C_1 в C_2 и D_1 в D_2.

Двойное отношение четверки точек, лежащих на одной прямой:

$$(A, B, C, D) = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{DC}.$$

В частности,

$$(A, B, C, \infty) = -\frac{AB}{BC}.$$

ЛЕММА 2. Пусть a, b, c, d - четыре прямые, проходящие через одну точку; l - прямая, пересекающая их в точках A, B, C, D соответственно. Двойное отношение (A, B, C, D) не зависит от положения l. (Оно называется двойным отношением четверки прямых a, b, c, d и обозначается (a, b, c, d)).

ТЕОРЕМА 4. При проективном преобразовании двойные отношения четверок точек сохраняются.

ЗАДАЧИ.

19. Какие линейные преобразования пространства R^3 определяют одно и то же проективное преобразование плоскости ?

20. Доказать теорему Дезарга.

21. Доказать теорему Паппа.

22. Гомологией называется проективное преобразование, оставляющее на месте все точки некоторой прямой ℓ, называемой осью гомологии, и все прямые, проходящие через некоторую точку C, называемую центром гомологии. Доказать, что при заданных ℓ и C гомология определяется образом A' какой-либо точки A, отличной от C и не лежащей на ℓ, причем точка A' может быть задана произвольно, лишь бы она лежала на прямой CA. Указать способ построения гомологии при помощи одной линейки.

23. Построить с помощью одной линейки прямую, проходящую через данную точку и недоступную точку пересечения данных прямых.

24. Что такое гомология с бесконечно удаленной осью ? о бесконечно удаленным центром ? с бесконечно удаленными осью и центром ?

25. Доказать, что всякое проективное преобразование может быть представлено в виде произведения двух гомологий.

26. Что происходит с двойным отношением (A,B,C,D) при перестановке точек ?

27. Доказать, что если проективное преобразование оставляет на месте три точки прямой ℓ, то оно оставляет на месте все ее точки.

28. Пусть $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$ – две четверки точек, лежащих на одной прямой. Доказать, что если $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$, то существует проективное преобразование, переводящее первую четверку во вторую.

29. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки M, N и P. Доказать теорему Чевы: для того, чтобы прямые AM, BN и CP пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

30. Доказать, что двойное отношение четверки прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, равно

$$\pm \frac{\sin\langle a,b\rangle}{\sin\langle b,c\rangle} \cdot \frac{\sin\langle a,d\rangle}{\sin\langle d,c\rangle},$$

где через $\langle \ell, m\rangle$ обозначается угол между прямыми ℓ и m.

31. Доказать, что двойное отношение четверки прямых сохраняется при проективном преобразовании.

32. Доказать, что всякое преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые и сохраняющее двойны

отношения четверок точек , лежащих на одной прямой, является проективным.

33. Доказать, что центральное проектирование плоскости ρ на плоскость ρ_1 с последующим совмещением ρ_1 с ρ при помощи движения в трехмерном пространстве является проективным преобразованием.

ЛЕКЦИЯ № 4

КРИВЫЕ 2-го ПОРЯДКА В ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Кривая 2-го порядка

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

в однородных координатах задается уравнением

$$A\xi_1^2+2B\xi_1\xi_2+C\xi_2^2+2D\xi_1\xi_3+2E\xi_2\xi_3+F\xi_3^2=0.$$

Бесконечно удаленные точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, присоединяются к кривой. Число бесконечно удаленных точек:

у эллипса - 0,

у параболы - I,

у гиперболы - 2.

При проективном преобразовании любая кривая 2-го порядка переходит в кривую 2-го порядка.

ТЕОРЕМА 5. В проективной геометрии все невырожденные кривые 2-го порядка равны.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 - две тройки точек на невырожденной кривой 2-го порядка K. Существует единственное проективное преобразование, сохраняющее кривую K и переводящее точки A_1, B_1, C_1 в точки A_2, B_2, C_2 соответственно.

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Плоскость Лобачевского можно отождествить с кругом Λ (без границы); при этом группой движений плоскости Лобачевского будет группа проективных преобразований, оставляющих круг Λ на месте.

Прямыми плоскости Лобачевского называются хорды круга Λ.

Флагом на плоскости Лобачевского называется совокупность точки, луча, выходящего из этой точки, и одной из полуплоскостей, примыкающих к этому лучу.

ТЕОРЕМА 7. Для любых двух флагов на плоскости Лобачевского существует единственное движение, переводящее первый флаг во второй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на установлении взаимно-однозначного соответствия между флагами на плоскости Лобачевского Λ и тройками точек на окружности K, ограничивающей круг Λ (см. рис. 1).

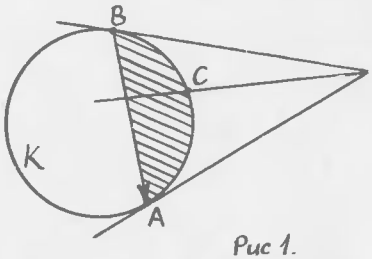


Рис 1.

Теорема 7 верна и для евклидовой плоскости.

Длина отрезка $|AB|$ должна обладать следующими свойствами:

$(\mathcal{D}1)$ инвариантность относительно движений;

$(\mathcal{D}2)$ аддитивность вдоль прямой, т.е. если точки A, B, C лежат на одной прямой, причем B лежит между A и C, то $|AC| = |AB| + |BC|$.

На плоскости Лобачевского длина отрезка может быть определена по формуле

(I) $|AB| = k \ln(A, \mathcal{D}, B, C)$

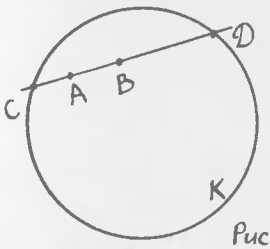


Рис 2.

где k - "масштабный множитель", C и $\mathcal{D}$ - точки окружности K, изображенные на рис. 2.

Мера угла должна обладать свойствами:

(У1) инвариантность относительно движений;

(У2) аддитивность для углов с общей вершиной, т.е. если луч OB лежит между OA и OC, то $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.

(У3) мера полного угла равна 2π (при градусном измерении - 360^0).

На плоскости Лобачевского Λ углы с вершиной в центре круга Λ измеряются как евклидовы, а для измерения произвольного угла его переводят путем движения в угол с вершиной в центре круга Λ.

Других способов определения длины отрезка и меры угла на плоскости Лобачевского не существует.

Следующие теоремы евклидовой геометрии вместе с их доказательствами безо всяких изменений переносятся в геометрию Лобачевского.

1. В равнобедренном треугольнике: углы при основании равны; биссектриса угла при вершине перпендикулярна основанию и делит его пополам.

2. 3 признака равенства треугольников.

3. Внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного.

4. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

5. Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

ЗАДАЧИ.

34. Записать в неоднородных координатах какое-ни - будь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2+y^2=1$:

а) в параболу $y=x^2$;

б) в гиперболу $xy=1$.

35. Пусть A, B, C, D - точки, лежащие на невырожденной кривой 2-го порядка K . Доказать, что кривая K есть геометрическое место точек X , для которых двойное отношение четверки прямых XA, XB, XC, XD равно некоторому числу k .

36. Пусть A_1, A_2 - точки на окружности K, B_1, B_2 - точки внутри нее. Доказать, что существует ровно два проективных преобразования, сохраняющих K и переводящих A_1 в A_2, а B_1 - в B_2 .

37. Записать в неоднородных координатах какое-нибудь проективное преобразование , переводящее окружность $x^2+y^2=1$ в себя, а точку $(0,0)$ - в точку $(\frac{1}{2},0)$.

38. Доказать, что нельзя с помощью одной линейки найти центр данной окружности.

39. Пусть K - окружность, ℓ - ее секущая. Доказать, что существует проективное преобразование, оставляющее на месте все точки прямой ℓ , переводящее окружность K в себя и меняющее местами дуги, на которые она разбивается прямой ℓ .

40. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, описанный около окружности K, причем P, Q, R, S – точки касания, лежащие на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно. Доказать, что прямые PR и QS и диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке и что точка пересечения прямых PQ и RS лежит на прямой AC.

41. В обозначениях задачи 40, доказать, что в смысле геометрии Лобачевского внутри окружности K диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами углов, образованных прямыми PR и QS.

42. Доказать, что на плоскости Лобачевского через любую точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной прямой.

43. Доказать, что на плоскости Лобачевского геометрическое место точек, равноудаленных от прямых ℓ_1 и ℓ_2, есть объединение биссектрис углов, образованных прямыми ℓ_1 и ℓ_2, если эти прямые пересекаются, и одна прямая – если они не пересекаются.

44. Доказать, что всякое утверждение относительно углов с общей вершиной, верное в евклидовой геометрии, верно и в геометрии Лобачевского.

45. Доказать, что в любом треугольнике на плоскости Лобачевского:

а) биссектрисы пересекаются в одной точке;

б) перпендикуляры, проведенные к сторонам через их середины, либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке;

в) высоты либо вообще не пересекаются, либо пересе - каются в одной точке (указание: поместить одну из вершин треугольника в центр круга Λ);

г)* медианы пересекаются в одной точке.

46. Проверить непосредственной выкладкой, что длина отрезка на плоскости Лобачевского определенная по формуле (I), аддитивна вдоль прямой.

47. Доказать, что прямая на плоскости Лобачевского изометрична прямой на евклидовой плоскости.

ЛЕКЦИЯ № 5

СУММА УГЛОВ МНОГОУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Аксиома о параллельных прямых не выполняется в геометрии Лобачевского , поэтому не проходит обычное доказательство теоремы о сумме углов многоугольника. Более того, имеет место

ТЕОРЕМА 8. Сумма углов любого треугольника на плоскости Лобачевского меньше π.

Для любого многоугольника M на плоскости Лобачевского угловым дефектом $\Delta(M)$ называется разность между суммой внешних углов и 2π.

ТЕОРЕМА 9. Функция $\Delta(M)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Delta(M) \geq 0$ для любого M,

2) если $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$, где M_i - попарно не перекрывающиеся многоугольники, то

$$\Delta(M) = \Delta(M_1) + \dots + \Delta(M_k).$$

ТЕОРЕМА 10. (4-й признак равенства треугольников). Если все углы одного треугольника на плоскости Лобачевского равны соответствующим углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

КОРРЕЛЯЦИИ.

Обозначим через P_1 множество точек проективной плоскости и через P_2 - множество ее прямых. Пусть

$$P = P_1 \cup P_2.$$

Для элементов $x, y \in P$ определим инцидентность:

$x \sim y$, если $x \in P_1$, $y \in P_2$ и $x \in y$ или $y \in P_1$, $x \in P_2$ и $y \in x$.

Если $x_1, x_2, x_3, x_4 \sim y$, то определено двойное отношение (x_1, x_2, x_3, x_4).

Взаимно-однозначное отображение φ множества P на себя называется корреляцией, если

1) $\varphi(P_1) = P_2$, $\varphi(P_2) = P_1$;

2) $x \backsim y \Leftrightarrow \varphi(x) \backsim \varphi(y)$;

3) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4))$.

(Для проективного преобразования вместо I) выполняется условие $\varphi(P_1)=P_1$, $\varphi(P_2)=P_2$).

Произведение корреляции и проективного преобразования (в любом порядке) есть корреляция; произведение двух корреляций есть проективное преобразование.

ТЕОРЕМА II. Корреляции существуют.

Из теоремы II вытекает принцип двойственности в проективной геометрии: если в любой теореме о точках и прямых проективной плоскости, формулируемой в терминах инцидентности и двойного отношения, заменить слова "точка" и "прямая" на "прямая" и " точка" соответственно, то получится верная теорема.

ПРИМЕР. Из теоремы Паппа получается теорема: если стороны шестиугольника (или их продолжения) проходят поочередно через точки A и B ,то его диагонали пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧИ.

48. Доказать, что если $M' \subset M$,то $\Delta(M') \leq \Delta(M)$.

49. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого треугольника на плоскости

Лобачевского, лежащего в круге радиуса δ, угловой дефект меньше ε.

50*. То же, что в задаче 49, для любого многоугольника (число сторон заранее не задано).

51*. Доказать, что если в формуле длины отрезка на плоскости Лобачевского взять $k = \frac{1}{2}$, то

а) длина окружности радиуса r равна $2\pi \operatorname{sh} r$,

б) площадь круга радиуса r равна $2\pi(\operatorname{ch} r - 1)$.

52. Доказать, что если определить метрику на плоскости Лобачевского как в задаче 51, то угловой дефект любого многоугольника будет равен его площади.

53. Доказать, что для треугольника со сторонами a, b, c на плоскости Лобачевского имеет место " неравенство косинусов". :

$$c^2 > a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

где γ - угол против стороны c.

54. Доказать, что если γ - такое преобразование плоскости Лобачевского, при котором длина любого отрезка умножается на постоянное число $k \neq 0$, то $k = 1$ и γ - движение в смысле определения, данного в лекциях.

55. Какая теорема двойственна:

а) теореме Лезарга;

б) теореме Чевы ?

56. Доказать, что если φ_0 – какая-нибудь корреляция, то любая корреляция φ представляется в виде $\varphi = \gamma\varphi_0$, где γ – проективное преобразование.

57. Доказать, что если φ – корреляция, переводящая вершины некоторого треугольника в противоположные стороны, то $\varphi^2 = \varepsilon$.

ЛЕКЦИЯ № 6

КОРРЕЛЯЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

ТЕОРЕМА I3. Для каждой невырожденной кривой 2-го порядка K существует единственная корреляция φ, обладающая следующими свойствами:

I) если A – точка кривой K, то $\varphi(A)$ – касательнан к K в точке A;

2) если e –касательная к K, то $\varphi(e)$ -точка касания K и e.

Эта корреляция удовлетворяет условию $\varphi^2 = \varepsilon$ и называется полярным преобразованием относительно K.

Образ точки при этом преобразовании называется ее полярой, образ прямой – ее полюсом.

Способ построенин поляр:

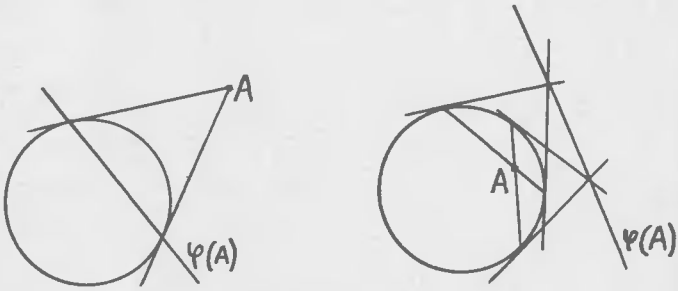


Рис 3.

Теорема I3 позволяет применять принцип двойствен - ности к таким теоремам, в формулировке которых участвует кривая 2-го порядка.

ПРИМЕРЫ: теоремы, двойственные к теореме Паскаля и к теореме о том, что прямые, соединяющие вершины треуголь- ника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

К комплексной плоскости добавляется точка ∞ . На расширенной таким образом плоскости рассматриваются преоб- разования:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

$$z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \qquad (ad-bc\neq 0,$$

Они называются конформными преооразованиями I-го и

2-го рода соответственно. Эти преобразования образуют группу, геометрия которой называется конформной геометрией.

ТЕОРЕМА I4. При конформных преобразованиях сохраняются углы между кривыми.

Доказательство основано на формуле

$$\left(\frac{az(t)+b}{cz(t)+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cz(t)+d)^2}\,z'(t).$$

ТЕОРЕМА I5. При конформных преобразованиях прямые и окружности переходят в прямые и окружности (но прямые - не обязательно в прямые, а окружности - не обязательно в окружности !)

Для доказательства используется

ЛЕММА . Общее уравнение прямой или окружности на комплексной плоскости имеет вид

$$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0,$$

где A, C вещеотвенны, $|B|^2>AC$. (При $A=0$ получается прямая, при $A\neq 0$ - окружность .)

Инверсия в окружности радиуса r с центром в точке O - преобразование, переводящее точку A в точку A', лежащую на луче OA и удовлетворяющую условию

$$OA'\cdot OA = r^2.$$

Точки O и ∞ меняются местами.

Инверсия является конформным преобразованием. Так, инверсия в единичной окружности с центром в O – это преобразование $z \to \frac{1}{\bar{z}}$.

Конформные преобразования, оставляющее на месте ∞ , характеризуются тем, что $C=0$. Это – произведения движений на подобия.

ТЕОРЕМА I6. Для любых двух троек точек $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ существует ровно два конформных преобразования, переводящих A_1 в A_2 , B_1 в B_2 и C_1 в C_2 .

Пример на применение конформного преобразования для решения задачи на построение: построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых или окружностей.

ЛЕКЦИЯ № 7

Конформная модель геометрии Лобачевского

Рассматриваются конформные преобразования, отображающие круг Λ на себя. Они образуют группу . По теореме I6 , для любых двух троек точек, лежащих на границе круга K , существует единственное преобразование из этой группы , переводящее первую тройку во вторую.

Так как круг с помощью конформного преобразования можно отобразить на полуплоскость $\Im m z > 0$, то мы получим ту же геометрию, если вместо круга будем рассматривать полуплоскость $\Im m z > 0$, а вместо конформных преобразований, отображающих круг на себя – конформные преобразования, отображающие полуплоскость $\Im m z > 0$ на себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геометрии $\{M_1, G_1\}$ и $\{M_2, G_2\}$ называются изоморфными, если существует такое взаимнооднозначное отображение θ множества M_1 на M_2, что

$$\theta G_1 \theta^{-1} = G_2$$

ТЕОРЕМА I7. Построенная выше геометрия изоморфна геометрии Лобачевского в проективной модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть M_1 – полуплоскость $\Im m z > 0$,

G_1 – группа конформных преобразований, отображающих M_1 на себя.

Это преобразование вида

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{или} \quad z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},$$

где a, b, c, d вещественны, $ad - bc > 0$ в первом случае и $ad - bc < 0$ – во втором случае.

Пусть M_2 – внутренность параболы $y > x^2$,

G_2 – группа проективных преобразований,

отображающих M_2 на себя.

Для каждого $z \in M_1$ рассмотрим приведенный квадратный трехчлен, корнем которого является z,

$$(t-z)(t-\bar{z}) = t^2-(z+\bar{z})t+z\bar{z}.$$

Полагаем

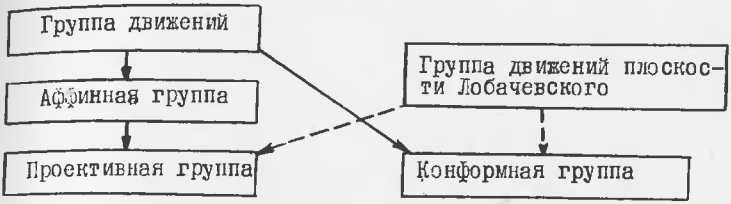
$$\theta(z)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{,где } x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=z\bar{z}.$$

Отображение θ взаимно однозначно отображает M_1 на M_2. Непосредственно проверяется, что $\theta G_1 \theta^{-1} < G_2$. Совпадение $\theta G_1 \theta^{-1}$ с G_2 следует из того, что преобразованием из $\theta G_1 \theta^{-1}$ любую тройку точек на границе можно перевести в любую другую.

В конформной модели плоскости Лобачевского углы измеряются, как евклидовы, а прямыми являются дуги окружностей и части прямых, перпендикулярные к границе.

Пользуясь этой моделью, легче доказать теорему о том, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше π.

Сводка основных групп преобразований на плоскости.



(Стрелка означает включение; пунктир одначает ,что включение зависит от модели .)

ЗАДАЧИ.

58. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к данной окружности, проведенных через концы хорды, проходящей через данную точку внутри окружности.

59. Сформулировать теорему, двойственную :

а) утверждению задачи 35,

б) теореме о том, что сумма двух сторон треугольника на плоскости Лобачевского больше третьей.

60*. Доказать, что если корреляция φ удовлетворяет условию $\varphi^2 = \varepsilon$ и существует такая точка A , что $A \in \varphi(A)$, то φ - полярное преобразование относительно некоторой невырожденной кривой 2-го порядка.

61*. Доказать, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми и переводит окружности на сфере

в прямые и окружности на плоскости.

62. Доказать, что конформное преобразование, не оставляющее на месте ∞, однозначно представляется в виде произведения движения и инверсии.

63. Найти все конформные преобразования γ, удовлетворяющие условиям:

а) $\gamma(1)=0,\ \gamma(i)=1,\ \gamma(-i)=\infty$;

б) $\gamma(1)=i,\ \gamma(1+i)=1,\ \gamma(i)=0$.

64. Записать через операции над комплексными числами инверсию в окружности радиуса r с центром в точке C.

65. Доказать, что если δ - инверсия, а γ - любое конформное преобразование, то $\gamma\delta\gamma^{-1}$ - либо инверсия, либо отражение в прямой.

66. Доказать, что не существует аддитивной меры дуги окружности, инвариантной относительно всех конформных преобразований.

67. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под данными углами.

68. Доказать, что если конформное преобразование 2-го рода переводит прямую l в себя, а точки $A, B \in l$ меняет местами, то любую окружность, проходящую через эти точки, оно оставляет на месте.

69. В данную окружность C вписать многоугольник $A_1, A_2, \dots A_n$, стороны $A_i A_{i+1}$ которого прохо-

дят через данные точки O_i или параллельны данным прямым ℓ_i .

(Указание. Рассмотреть конформные преобразования 2-го рода γ_i , удовлетворяющие условиям:

$$\gamma_i(A_i) = A_{i+1}\ ,\ \gamma_i(A_{i+1}) = A_i$$

$$\gamma_i(O_i) = O_i \quad \text{или} \quad \gamma_i(\ell_i) = \ell_i$$

Точка A_1 будет неподвижной точкой преобразования

$$\gamma_n \gamma_{n-1} \dots \gamma_2 \gamma_1 .$$

70. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ переводило круг $|z| < 1$ в себя.

71*. Как измеряется длина отрезка на плоскости Лобачевского в конформной модели ?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАЧЕТА:

№№ 3- 6 , 8- I2 , I9, 20, 22-24 , 26- 28, 30-34, 37, 38, 42, 44, 46 - 48, 55а, 56, 58, 59, 62-64, 67, 70 .

ПЛОЩАДИ И ДЛИНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

А.Б.Сосинский

В программе нашего интерната указанный в заглавии раздел непосредственно следует за разделом "Объемы" и существенно на него опирается. Так как в выпусках "Математической школы" уже имеется очень содержательный и изящный материал по объемам (лекции Е.Б.Дынкина, выпуск Ш), мы эту часть курса не приводим, и будем ссылаться на выпуск Ш (например, ссылка (ДІЗ) означает: "Математическая Школа", вып.Ш, стр.ІЗ). Заметим все же, что нам не нужна теория объемов в той общности, в которой она строится в (Д); достаточек более элементарный подход (мера Жордана вместо меры Лебега).

§0. Интуитивные предпосылки

Допустим, что мы желеем узнать длину дороги. Для этого можно построить ломаную, вершины которой расположены на середине дороги и измерить (например, с помощью линейки) длину ее звеньев; при этом ясно, что результат будет тем точнее, чем ближе выбираются вершины.

Однако, можно поступить и по другому. Если дороге мощёная, то можно наити ее площадь (если мостовая составлена из равновеликих булыжников, то достаточно их сосчитать) и потом поделить площадь на ширину дороги; чем уже дорога, тем точнее получится измерение.

Допустим теперь, что мы желаем вычислить длину проволоки сложной формы (например, пружины) в пространстве. Здесь снова можно отроить аппроксимирующую ломаную, но можно поступить иначе. Найдем объем проволоки (для этого можно опустить ее в заполненный бак и измерить объем вытесненный воды), а затем поделим этот объем на площадь сечения. Интуитивно ясно, что полученное число будет (при подходящем выборе единиц) близко к длине проволоки.

Сопоставляя эти два примера, мы видим, что они основаны, по существу, на одной и той же идее, которая и будет основой дальнейшего.

§ I. Предварительные сведения

Пусть дано некоторое пространство P, в котором определено расстояние $\rho(x,y)$ между любыми точками $x,y\in P$. Чаще всего P будет плоскостью или обычным трехмерным пространством; лишь в § 5 мы рассмотрим n-мерное евклидово пространство. Пока нам важно лишь то, что расстояние определено.

Определим ε-окрестность (или ε-шар) данной точки x, как множество всех точек пространства, чьи расстояния до x строго меньше числа ε (обозначение: $O_\varepsilon x$, иногда $W_\varepsilon x$).

Если дано произвольное множество $M\subset P$, то ε-окрестностью множества M назовем объединение ε-окрестностей всех его точек (обозначение: $O_\varepsilon M$). Вспомнив определение ε-окрестности точки, мы видим, что $O_\varepsilon M$ со-

стоит из всех точек пространства, для каждой из которых найдется на расстоянии, меньшем чем ε, точка из M.

Примеры. На плоскости множество $O_\varepsilon x$ – круг (без границы!) с центром x, радиуса ε. В трехмерном пространстве $O_\varepsilon x$ – обычный шар (без граничной оферы).

ε – окрестноть окружности на плоскости – кольцевая полоса (если радиус окружности $> \varepsilon$); в пространстве – полноторье (бублик). ε – окрестность квадрата на плоскости – квадрат с закруглёнными углами.

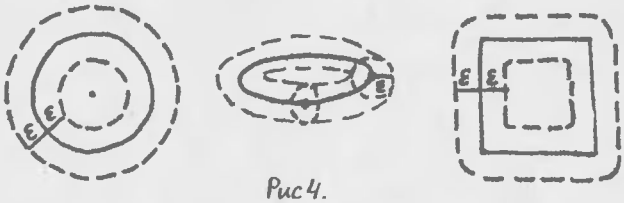


Рис 4.

В дальнейшем нам еще потребуется понятие границы множества M: это совокупность ∂M всех точек пространства, каждая ε – окрестность которых содержит как точки из M, так точки из $P \setminus M$. Окружность, например, является границей круга на плоскости.

Если пространство, о котором идет речь, одно из евклидовых, то в нем, согласно (Д), определен объем $V_n M$ для некоторых множеств (а именно, для так называемых "измеримых множеств" или "тел" (Д17)). Т.к. ε – окрестность ограниченного множества ограничена, то, согласно следствию 2 (Д17), ε – окрестность любого ограниченного множества имеет объем. В частности, для точки имеем в трехмерном пространстве $V_3 O_\varepsilon x = \alpha_3 \varepsilon^3$, где $\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$; на плоскости $V_2 O_\varepsilon x = \alpha_2 \varepsilon^2$, где $\alpha_2 = \pi$; на прямой $V_1 O_\varepsilon x = \alpha_1 \varepsilon$, где $\alpha_1 = 2$.

§ 2. Площадь множества в трехмерном пространстве

Будем говорить, что множество $M < E^3$ имеет площадь (или 2-измеримо), если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_3 O_\varepsilon M}{2\varepsilon}.$$

Численное значение этого предела называется площадью множества M и обозначается $V_2 M$.

Примеры.

а) Т.к. ε - окрестность сферы S_R является разностью между шаром радиуса $R+\varepsilon$ и шаром радиуса $R-\varepsilon$, имеем:

$$V_2 S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} V_3 O_\varepsilon S_R =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \alpha_3 (6R^2\varepsilon + 2\varepsilon^2) = \alpha_3 \cdot 3R^2 = 4\pi R^2.$$

б) Т.к. ε -окрестность боковой поверхности C прямого кругового цилиндра $Ц_R$ состоит из разности цилиндров с добавленными двумя "бубликами" (окрестностями верхней и нижней граничной окружностей K_1 и K_2 поверхности C), то мы имеем:

$$[Ц_{R+\varepsilon} \setminus Ц_{R-\varepsilon}] \setminus (O_\varepsilon K_1 \cup O_\varepsilon K_2) < O_\varepsilon C = [Ц_{R+\varepsilon} \setminus Ц_{R-\varepsilon}] \cup [O_\varepsilon K_1 \cup O_\varepsilon K_2]$$

или $A \setminus B < O_\varepsilon C < A \cup B$

(где $B = O_\varepsilon K_1 \cup O_\varepsilon K_2$ и $A = Ц_{R+\varepsilon} \setminus Ц_{R-\varepsilon}$)

Отсюда по монотонности (ДІ6) получим:

$$V_3 A - V_3 B \le V_3 O_\varepsilon C \le V_3 A + V_3 B.$$

Нетрудно проверить, что $\frac{1}{2\varepsilon} V_3 B \to 0$, так что по лемме "о двух милиционерах":

$$V_2 C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_3 O_\varepsilon C}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} V_3 \left(\mathcal{U}_{R+\varepsilon} \setminus \mathcal{U}_{R-\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi}{2\varepsilon} h \left[(R+\varepsilon) - (R-\varepsilon) \right]^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi}{2\varepsilon} 4R\varepsilon h = 2\pi R h.$$

в) Для <u>боковой поверхности прямого кругого конуса</u> (угол раствора α) получим (подробности опущены):

$$\frac{1}{2\varepsilon} \frac{\pi}{3} \left[(R+\varepsilon'')^2 (h+\varepsilon') - (h-\varepsilon')(R-\varepsilon'')^2 \right] \to \pi R \left(R + \sqrt{R^2+h^2} \right)$$

(так как $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$, и $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$;

здесь $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sin\alpha}$, $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{\cos\alpha}$).

г) Множество всех точек с рациональными координатами на сфере имеет такую же площадь, как сама сфера (докажите сами!).

§ 3. <u>Длина множества в трехмерном пространстве</u>

Будем говорить, что множество M <u>имеет длину</u> (или I-измеримо), если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_3 O_\varepsilon M}{\pi \varepsilon^2}.$$

Численное значение этого предела называется <u>длиной</u> множества M и обозначается $V_1 M$.

Нетрудно проверить, что $V_1[0,1] = 1$ и вообще для отрезков длина, определенная выше, совпадает с обычной.

Если множество M имеет длину, то его площадь равна нулю. В самом деле:

$$\frac{V_3 O_\varepsilon M}{2\varepsilon} = \frac{V_3 O_\varepsilon M}{\pi\varepsilon^2} \cdot 2\pi\varepsilon \to 0.$$

Отсюда легко доказать следующее: если из множества M выбросить подмножество N, имеющее длину, то площадь множества M не изменится ($V_2(M \setminus N) = V_2(M)$). Например, если у боковой поверхности конуса выбросить окружность в основании, его площадь не изменится.

§ 4. Некоторые связывающие теоремы

На плоскости, согласно (Д), тоже существует "объем" (который, конечно, привычнее называть "площадью"). Чтобы не путать плоский объем (площадь) с площадью в смысле § 2, обозначим плоский объем $V_2^{(2)} M$, а пространственный – $V_2^{(3)} M$ (верхний индекс указывает на размерность пространства).

Теорема I. Если множество M лежит в плоскости L и имеет в ней площадь $V_2^{(2)} M$, а его граница ∂M имеет нулевую площадь $(V_2^{(2)} \partial M = 0)$, то M имеет пространственную площадь, притом $V_2^{(3)} M = V_2^{(2)} M$.

Доказательство. Для любого множества $A \subset L$ определим $Ц_\varepsilon A$ как множество всех отрезков длины 2ε, ортогональных L, середина которых принаддежит A. Теорема вытекает из монотонности объема (ДІ6), формулы объема для прямого цилиндра (ДІ8) и очевидного соотношения:

$$Ц_\varepsilon M \setminus O_\varepsilon \partial M \subset O_\varepsilon M = Ц_\varepsilon M \cup O_\varepsilon \partial M.$$

Кроме площади, на плоскости можно определить и длину множества M формулой $V_1^{(2)} M = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} V_2^{(2)} O_\varepsilon M$.

О длине мы доказывали ряд теорем, которые здесь опускаются (это частные случаи теорем из § 5). Вычислим, например, длину окружности S (R - радиус, x - центр)

$$\frac{1}{2\varepsilon} V_2^{(2)} O_\varepsilon S = \frac{1}{2\varepsilon} V_2^{(2)} \left(O_{R+\varepsilon} x \setminus O_{R-\varepsilon} x \right) = \frac{1}{2\varepsilon} \pi \left[(R+\varepsilon)^2 - (R-\varepsilon)^2 \right] \to 2\pi R.$$

Теорема 2 (Аддитивность). Если два множества A и B в пространстве имеют площадь, а их пересечение имеет нулевую площадь, то

$$V_2^{(3)}(A \cup B) = V_2^{(3)} A + V_2^{(3)} B.$$

Доказательство вытекает обычным образом из соотношения

$$(O_\varepsilon A) \cup O_\varepsilon (A \cap B) \subset O_\varepsilon (A \cup B) = (O_\varepsilon A) \cup (O_\varepsilon B) \cup O_\varepsilon (A \cap B)$$

Из теорем I и 2 можно вывести, в частности, тот факт, что что площадь многогранника (в смысле § 2) будет равняться сумме площадей (в элементарном смысле) его граней.

§ 5. Общая теория

Назовем множество M в n-мерном евклидовом пространстве k-измеримым, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\alpha_k \varepsilon^k} V_n(O_\varepsilon M) \qquad (*)$$

(Здесь $\alpha_k \varepsilon^k$ - объем k-мерного шара; α_k - некоторое число (оно не зависит от ε), значение которого известны (Д23):

$$\alpha_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad \alpha_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1)}).$$

Численное значение предела $(*)$ назовем k-мерной площадью множества M и обозначим $V_k^{(n)} M$. Т.к. k - любое число в пределах от 0 до $n-1$, мы для данного множества получим n разных площадей. Если для некоторого k число $V_k^{(n)} M$ определено и строго положительно, то легко доказать, что тогда

$$+\infty = V_0^{(n)} M = \cdots = V_{k-1}^{(n)} M > V_k^{(n)} M > V_{k+1}^{(n)} M = \cdots = V_{n-1}^{(n)} M = V_n M = 0.$$

Из определений и (Д15-16) выводятся:

1. Принцип аддитивности. Если A и B k- измеримы и $V_k^{(n)}(A \cap B) = 0$, то

$$V_k^{(n)}(A \cup B) = V_k^{(n)} A + V_k^{(n)} B.$$

2. Принцип инвариантности. Если два множества A и B k-измеримы и конгруэнтны, то $V_k^{(n)} A = V_k^{(n)} B$.

3. Нормирующее условие. Для k-мерного единичного куба Q^k в n-мерном евклидовом пространстве

$$V_k^{(n)} Q^k = 1.$$

4. Принцип монотонности. Если определены $V_k^{(n)} A$ и $V_k^{(n)} B$ и $A \subset B$, то

$$V_k^{(n)} A \leq V_k^{(n)} B.$$

Следует заметить, что принцип непрерывности для нашей теории не верен; верен, однако

5. Принцип индуктивности. Если M лежит в $(n-1)$-мерной гиперплоскости и в ней k-измерим, то M k-измерим в E^n, притом $V_k^{(n-1)} M = V_k^{(n)} M$.

В заключение вычислим $(n-1)$-мерную площадь $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}, лежащей в E^n (т.е. $V_{n-1}^{(n)} S^{n-1}$):

$$\frac{1}{2\varepsilon} V_n O_\varepsilon S = \frac{1}{2\varepsilon} V_n \left(O_{R+\varepsilon} x \setminus O_{R-\varepsilon} x \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_k \left[(R+\varepsilon)^k - (R-\varepsilon)^k \right] \to \frac{1}{2\varepsilon} \alpha_k 2k R^{k-1} \varepsilon =$$

$$= k \alpha_k R^{k-1} = \frac{\partial}{\partial R} \alpha_k R^k.$$

А.Л.Розенталь.

Сначала приведем результаты летнего конкурса для 7 - 8 классов.

I премия.	Литвин Юрий	школа № 2
	Черкасский Борис	школа № 2
	Каменский Александр	школа № 2
	Черноуцан Алексей	школа № 2
	Гуревич Владимир	школа № 2
II премия.	Буртов Яков	школа № 2
	Розин Яков	школа № 2
	Крысанов Владимир	школа № 455
	Шокуров Александр	школа № 2
	Пухов Александр	школа № 396
III премия.	Полоцкий Владимир	школа № 444
	Розенман Михаил	школа № 444
	Куликов Виктор	школа № 444
	Соболев Геннадий	школа № 2

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛЕТНЕГО ЦИКЛА.

Задача № I. 30 команд участвуют в первенстве по футболу. Каждые две команды должны играть между собой один матч. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

Решение. Доказательство проведём от противного. Допустим, что к некоторому моменту состязаний команды сыграли различное количество матчей. Присвоим каждой команде номер, на единицу больший числа сыгранных этой командой матчей.

Ясно, что номером может быть любое целое число от I до 30. Так как команд тоже 30 и никакие 2 команды не получат одинаковых номеров, то должна найтись команда, имеющая тридцатый номер, то-есть сыгравшая все 29 матчей, в том числе и матч с командой, имеющей первый номер. Но команда, получившая первый номер, к данному моменту не сыграла ни одного матча. Противоречие.

Задача № 2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960} \quad ?$$

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 14\sqrt{10}.$$

Предположим, что x_0 , y_0 - решение данного уравнения, т.е. $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} = 14\sqrt{10}.$ (1)

Докажем сначала, что числа $\sqrt{x_0}$ и $\sqrt{y_0}$ представляются в виде $\sqrt{x_0} = k\sqrt{10}$, $\sqrt{y_0} = m\sqrt{10}$, где k и m — неотрицательные целые числа. Проведем доказательство для $\sqrt{y_0}$. Имеем

$$\sqrt{x_0} = 14\sqrt{10} - \sqrt{y_0};$$

$$x_0 = 10 \cdot 196 - 28\sqrt{10y_0} + y_0.$$

Отсюда

$$\sqrt{10y_0} = \frac{y_0 + 1960 - x_0}{28}. \qquad (2)$$

В правой части равенства (2) стоит целое число (почему?). Квадратный корень из целого числа a является целым числом тогда и только тогда, когда $a = b^2$, где b – целое число[x]. Поэтому $10y_0 = b^2$. Но если квадрат целого числа делится на 10, то само это число делится на 10. Отсюда $b = 10m$ и, следовательно, $y_0 = 10m^2$. Итак, $\sqrt{y_0} = m\sqrt{10}$ и аналогично $\sqrt{x_0} = k\sqrt{10}$.

Подставляя в равенство (1) вместо $\sqrt{x_0}$ и $\sqrt{y_0}$ их выражения через k и m и сокращая на $\sqrt{10}$, получаем:

$$k + m = 14.$$

Последнее уравнение имеет 15 решений в целых неотрицательных числах:

$$k_1 = 14,\ m_1 = 0;\ k_2 = 13,\ m_2 = 1;\ \ldots;\ k_{15} = 0,\ m_{15} = 14.$$

Поэтому исходное уравнение имеет следующие 15 решений:

$$x_1 = 14^2 \cdot 10,\ y_1 = 0;\ x_2 = 13^2 \cdot 10,\ y_2 = 10;\ \ldots;\ x_{15} = 0,\ y_{15} = 14^2 \cdot 10.$$

---

x) См., например, книгу А.Нивена. Числа рациональные и иррациональные, "МИР", 1966, гл. 4, § 3, следствие 2.

Задача № 3. Найти 8 простых чисел, сумма квадратов которых на 992 меньше, чем учетверенное произведение.

Решение[x] Условию задачи, очевидно, удовлетворяют 8 чисел, каждое из которых равно 2. Докажем, что других решений нет.

Если p – число нечетное, то p^2 при делении на 8 даёт в остатке I. Следовательно, при делении на 8 суммы квадратов K нечетных чисел в остатке получится то же число, что и при делении на 8 числа K. Искомые числа $p_1, p_2, \dots, p_8$ должны удовлетворять равенству

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_8^2 = 4p_1p_2\cdots p_8 - 992.$$

Это равенство невозможно, если среди простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_8$ имеются как числа, равные 2, так и числа, отличные от 2, и, следовательно, нечетные, так как в этом случае правая часть равенства должна делиться на 8, а левая – нет.

Пусть теперь все 8 чисел $p_1, p_2, \dots, p_8$ нечетные. В этом случае число $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_8^2$ кратно 8, а число $4p_1p_2\cdots p_8 - 992 = 4(p_1\cdots p_8 - 248)$ на 8 не делится, так как в последнем выражении в скобках стоит нечетное число. Значит, и в этом случае равенство невозможно.

---

x) Это решение принадлежит Владимиру Полоцкому.

Задача № 4. Число p и q – простые; q^3-1 – делится на p, а $p-1$ делится на q. Доказать, что

$$p = 1+q+q^2.$$

Решение. Число $p-1$ делится на q, значит, $p-1 \geq q$ и $p \geq q+1$. Так как $q^3-1=(q-1)(1+q+q^2)$ делится на p, а $q-1<p$ и, значит, на p не делится, то на p должно делиться число $1+q+q^2$. [x] Таким образом, $1+q+q^2=nq$, где n – целое число.

Мы должны доказать, что $n=1$. Вычитая из обеих частей равенства $1+q+q^2=np$ по I, получим $q(q+1)=np$. Так как $p \geq q+1$, то $n \leq q$, в противном случае было бы $np-1 \geq (q+1)^2-1 > q(q+1)$. Преобразуя равенство $q(q+1)=np-1$, легко получить $q(q+1)-n(p-1)=n$. Левая часть последнего равенства делится на q, значит, и правая делится на q. Но $n-1<q$, значит, $n-1=0$, то-есть $n=1$, что и требовалось доказать.

---

x) Здесь мы пользуемся "основной теоремой арифметики", утверждающей, что каждое натуральное число, отличное от I, можно разложить на простые множители единственным образом, если отвлечься от порядка следования множителей. Доказательство этой теоремы можно прочитать, например, в книге Г.Радемахера и О.Теплица "Числа и фигуры", Физматгиз, 1962, стр. 92–95 или в книге А. Нивена „Числа рациональные и иррациональные", МИР, 1966, Приложение Б.

Задача № 5. Какое из чисел больше:

$$\frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1} \quad \text{или} \quad \frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1} \; ?$$

Решение. При любом натуральном n справедливо неравенство $(10^{n-1}+1)(10^{n+1}-1)>(10^n+1)^2$, в чем легко убедиться, раскрыв скобки. Поделив обе части неравенства на $(10^n+1)(10^{n+1}+1)$, получим (при n =1966), что первое из данных в задаче чисел больше второго.

Задача № 6. На белую плоскость брызнули черной краской. Тем самым все точки плоскости разбиты на два непустых множества : "черные" и "белые".

а) Доказать, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.

б) Доказать, что найдутся две точки разного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.

Решение[x] Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть на плоскости равносторонний треугольник со стороной 1966 м. По крайней мере две из его вершин имеют одинаковый цвет и расстояние между ними 1966 м.

---

x) Настоящее решение предложено учеником 2-й школы Пуховым Александром.

Докажем второе утверждение. Пусть точки A и B имеют разный цвет. Допустим для определенности, что точка A – черная, а точка B – белая. Отметим на луче AB точки, отстоящие от A на $m \cdot 1966$ м, где m – натуральные числа (рис. 5). Сначала рассмотрим случай, когда среди

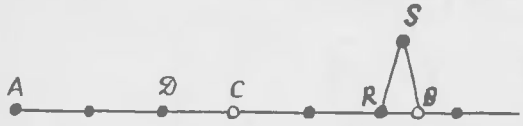


Рис 5.

отмеченных точек есть белые. Среди чисел m отвечающих белым точкам, есть наименьшее m_0. Точка C, отстоящая от A на $m_0 \cdot 1966$ м – белая, а точка D, отстоящая от A на $(m_0 - 1)$ 1966 м – черная (при $m_0 = 1$ точка D совпадает с A). Точки C и D образуют искомую пару.

Пусть теперь все отмеченные точки – черные. Среди них есть точка R такая, что $RB < 1966$ м. Рассмотрим равнобедренный треугольник RSB такой, что $RS = SB = 1966$ м. Если S – черная точка, то точки S и B образуют искомую пару точек. Если точка S – белая, то искомую пару точек образуют S и R.

Задача № 7. Доказать, что можно раскрасить плоскость с помощью девяти красок таким образом, что любые две точки, расстояние между которыми равно 1 м, имеют разный цвет.

Решение. Один из способов раскраски плоскости, удовлетворяющий условиям задачи, состоит в следующем. Вся

плоскость разбивается двумя семействами параллельных прямых на квадраты со стсроны 2м, а затем каждый квадрат разбивается на 9 одинаковых квадратов со стороной 2/3 $м^2$, которые раскрашиваются 9-ю различными красками: белой (Б), красный (К), оранжевой (О), желтый (Ж), зеленой (З), голубой (Г), синей (С), фиолетовой (Ф), и черный (Ч), как показано на рис. 6:

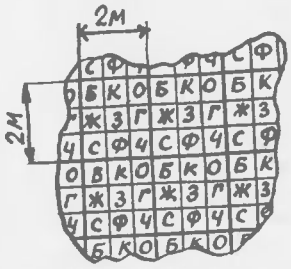


Рис 6.

Задача № 8. Разделить угол в 19^0 на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Решение. Один из способов: отложить на окружности последовательно девятнадцать равных дуг, соответствующих углам в 19^0. Так как 19^0. 19= $= 360^0 + 1^0$, то при этом удаётся построить угол, равный 1^0, то-есть девятнадцатой части угла в 19^0.

Задача № 9. Доказать, что число $5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

Решение. (предложено Владимиром Полоцким). Проведем доказательство, пользуясь методом математической индукции.[x] При $n=1$ данное число равно $152 = 19\cdot 8$. Допустим, что доказываемое утверждение справедливо при $n=k$, то-есть $5^{2k+1}+3^{k+2}\cdot 2^{k-1}$ делится на 19, и докажем, что это утверждение справедливо при $n=k+1$.

Действительно, при $n=k+1$ число

$$5^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}\cdot 2^{(k+1)-1} = 25\cdot 5^{2k+1}+6\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{k-1} =$$

$$= 5^{2k+1}\cdot 19 + 6\left(5^{2k+1}+3^{k+2}\cdot 2^{k+1}\right)$$

делится на 19, так как выражение в скобках, по предположению индукции, делится на 19. Утверждение доказано.

Задача № 10. В четырехугольнике три угла по 100^0. Доказать, что диагональ, проведенная из вершины четвертого угла, больше, чем вторая диагональ.

Решение. Углы A, B и D в четырехугольнике $ABCD$ равны по 100^0, а угол C равен 60^0. AC является наибольшей стороной в треугольниках ABC и ADC, так как она противолежит в этих треугольниках тупым углам. Значит, $AC > BC$ и $AC > DC$. Сумма углов B и D в треугольнике BCD равна 120^0, значит, по крайней

---

x) О методе математической индукции можно прочитать, например, в книжке И.С.Соминского " Метод математической индукции", "Наука", 1965.

1/4 4-1355

мере один из этих углов не меньше 60^0, то-есть не меньше угла C. Если $\angle BDC \geq \angle BCD$, то $BC \geq BD$, а значит, $AC > BD$ (рис.7,а)). Если же $\angle DBC \geq \angle BCD$, то $DC \geq BD$, значит, AC и в этом случае больше BD (рис.7,б)), что и требовалось доказать.

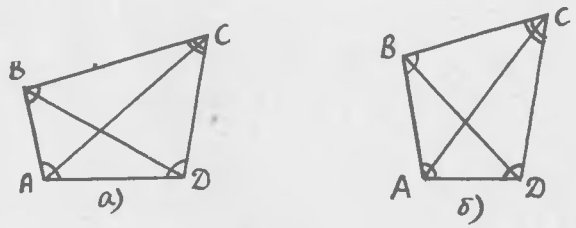


Рис 7.

8 КЛАСС. I ЦИКЛ.

М.И.Клиорин, А.Рудаков, Ж.М.Раббот,
С.М. Гусейн-Заде, И.В. Евстигнеев.

I цикл содержал задачи №№ I–22. За решение задач ребятам давалось следующее количество баллов:

№№ задач	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
кол.баллов	8	I2	7	4	7	9	7	I2	3	5	I2	7	7	II
№№ задач			I5	I6	I7	I8	I9	20	2I	22				
кол.баллов			3	9	II	8	6	6	I0	5				

За недостаточно полное решение задачи количество баллов снижалось.

Это делалось примерно так:

задача решена на $\pm$ – дается 3/4 полной оценки;

задача решена наполовину – дается I/2 полной оценки;

задача решена на $\mp$ – дается I/4 полной оценки.

Таким образом, участник, полностью решивший все задачи, набрал бы I68 баллов. Но, к сожалению, таких участников не оказалось.

Премии за I цикл задач распределились следующим образом:

I премия (более I00 очков). Каменский Александр
шк. № 2 гр.А. II7 баллов.

2 премия (80–I00 очков) Шматков Борис
шк. № 444 гр. Б 89 баллов.
Колчинский Александр
шк. № I2 гр. Б 89 баллов
Шокуров Александр
шк. № 2 гр.А 86 баллов
Глухов Сергей
шк. № 444 гр. Б 84 балла

Неклюдова Елена шк. № 123 гр.Е 83 балла

Гавриков Михаил шк. № 2 гр.А′ 82 балла

3 премия (60–80 очков) Полоцкий Владимир
шк. № 444 гр.Д 77 баллов

Соболев Геннадий
шк. № 2 гр.А′ 71 балл

Анулова Светлана (7 кл.)
шк. № 42 гр.А 69 баллов

4 премия (40–60 очков) Крысанов Владимир
шк. № 455 гр. F 50 баллов

Зеливинский Андрей
шк. № 2 гр. А′ 47 баллов

Необходимо отметить исключительно успешное участие в конкурсе группы А′ (руководители В.Гельфанд, А.Осетинский, О.Дынкина и др.).

Результаты участия групп ВМШ в конкурсе видны из следующей таблицы:

Группа	A	A′	B	C	Д	E	F	G
Кол.премий	I	5	0	0	I	I	I	2

Переходим к обзору решений задач первого цикла.

Задача №.I. См.задачу № 2 для 7-х классов.

Задача № 2. См.задачу № 3 для 7-х классов.

Задача № 3. На сторонах произвольного треугольника ABC, имеющего площадь, равную единице , выбрано по точке.

Соединяя эти точки, отсечем от треугольника ABC три треугольника, прилагающие к вершинам. Доказать, что хотя бы один из этих треугольников имеет площадь, не превышающую $1/4$.

Решение.

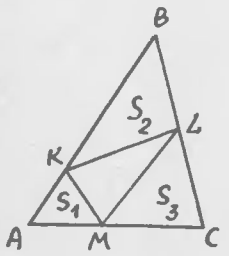


Рис.8.

I способ. Пусть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$;

$BL = t_1 a$, $CM = t_2 b$,

$AK = t_3 c$,

где $0 \le t_i \le 1$ $(i = 1,2,3)$ (см.рис.8).

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \angle A = 1.$$

$$S_1 = S_{AKM} = \frac{1}{2} t_3 (1 - t_2) b \cdot c \cdot \sin \angle A =$$

$$= t_3 (1 - t_2).$$

Точно так же: $S_2 = t_1 (1 - t_3)$,

$S_3 = t_2 (1 - t_2)$.

Поэтому

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = t_1 (1 - t_1) t_2 (1 - t_2) t_3 (1 - t_3).$$

Известно (докажите сами), что $t(1-t) \le \frac{1}{4}$.

Следовательно, $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \le \left(\frac{1}{4}\right)^3$, то есть все S_i не могут быть больше $\frac{1}{4}$.

II способ. (Обозначения см.в первом решении).

Т.к. $t_1 + t_2 + t_3 + (1 - t_1) + (1 - t_2) + (1 - t_3) = 3$,

то среди чисел

$$t_1 + (1 + t_3),\ t_2 + (1 - t_1),\ t_3 + (1 - t_2)$$

найдется такое, которое не больше единицы.
Пусть, например, $t_3 + (1-t_2) \leq 1$.
Тогда $(1-t_2) \leq (1-t_3)$, т.е.

$$S_1 = t_3(1-t_2) \leq t_3(1-t_3) \leq \frac{1}{4}$$, что

и требовалось доказать.

Задача № 4. Решить уравнение:

$$x^2 = 1 - 1966(1-1966x^2)^2.$$

Решение.

Заметим, что если $X = 1 - 1966x^2$, то, очевидно, X - корень нашего уравнения. Решая ур-ие $1966x^2 + x - 1 = 0$, мы находим два корня исходного ур-ия : x_1 и x_2 .
Перепишем исходное уравнение в виде

$$x - 1 + 1966(1-1966x^2)^2 = 0;$$

$$1966^3x^4 - 2\cdot 1966^2x^2 + x + 1965 = 0;$$

многочлен $1966^3x^4 - 2\cdot 1966^2x^2 + x + 1965$ делится на $1966x^2 + x - 1$.

Действительно,

$$1966^3x^4 - 2\cdot 1966^2x^2 + x + 1965 =$$

$$= (1966x^2 + x - 1)(1966^2x^2 - 1966x - 1965).$$

Решая уравнение $1966^2 x^2 - 1966\,x - 1965 = 0$, мы находим ещё два корня нашего ур-ия : x_3 и x_4 . Но так как известно, что уравнение четвертой степени имеет не более четырёх решений, то мы найдем, таким образом, вое корни данного уравнения.

Задача № 5. В треугольнике ABC выбрана точка O . На продолжении отрезка AO откладывается отрезок OA' , равный половине отрезка AO . Аналогичные построения проделываются с отрезками BO и CO. Могут ли вое три точки: A' , B' и C' лежать внутри треугольника ABC ?

Решение. При решении задачи рассмотрим два случая.

I. Точка O совпадает с центром тяжести треугольника (с точкой пересечения его медиан). В этом случае точки A' , B' и C' попадают на стороны треугольника ABC , так что ответ на вопрос задачи отрицательный.

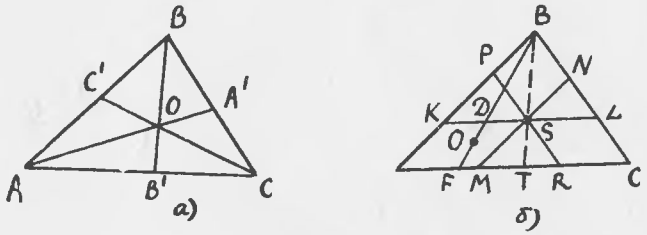


Рис 9.

2. Точка O не совпадает с центром тяжести треугольника ABC – точкой S. Проведем через точку S прямые, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рис. 98). Точка O принадлежит хотя бы одной из трапеций : $AKLC$, $BNMA$ или $BPRC$. Пусть, например, точка O принадлежит трапеции $AKLC$ (см. рис. 98). Докажем, что $\frac{1}{2}OB > OF$ (I). Ясно, что $\frac{1}{2}BD = DF$, так как $KL \parallel AC$ и $\frac{BD}{FD} = \frac{BS}{ST} = \frac{1}{2}$. Теперь неравенство (I) очевидно, а из него следует, что точка B' лежит вне треугольника ABC. Таким образом, и в этом случае все три точки лежат внутри треугольника не могут.

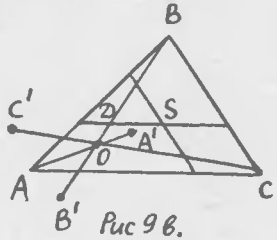


Рис 98.

Задача № 6. Все точки плоскости разбиты на три класса. Доказать, что хотя бы в одном из этих классов найдутся две точки, расстояние между которыми равно I см.

Решение. Можно считать, что три класса точек – это классы белых, черных и красных точек.

Возьмем произвольную красную точку. Если на окружности с центром в этой точке и радиуса I см. найдется хотя бы одна красная точка, то задача решена. Предположим, что такой точки не нашлось, то есть указанная окружность – – черно-белая.

Рассмотрим всевозможные хорды этой окружности длины I см. Если хотя бы у одной из них концы одного цвета, то задача решена.

Пусть у всех таких хорд концы разного цвета (один – белый, другой – черный). Построим на каждой из хорд как на основании правильный треугольник (третья вершина треугольника лежит вне круга с центром в первоначальной

выбранной точке и радиусом в I см.). Если хотя бы одна из этих третьих вершин треугольников оказалась черной или белой, то задача решена.

Осталось рассмотреть случай, когда все третьи вершины - красные. Легко доказать, что третьи вершины треугольников образуют окружность с центром в начальной точке и радиусом $\sqrt{3}$ см. Но в такой окружности всегда можно найти хорду длиной в I см. Задача решена.

Задача № 7. Дана окружность O, ее хорда AB и точки C и D, лежащие на окружности по одну сторону от этой хорды. Построить такую точку E, лежащую на окружности O, чтобы угол DEC высекал на хорде AB отрезок данной длины.

Решение. Проведем анализ решения. Предположим, что задача решена.

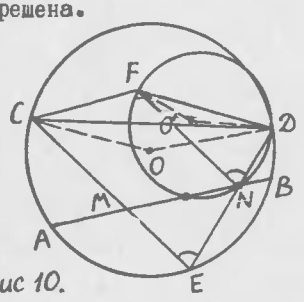


Рис 10.

Пусть точка E (см.рис. 10) - искомая. Проведем отрезок CF, равный и параллельный отрезку MN (последний отрезок имеет заданную длину). Тогда $\angle CED = \angle FND$ и точка N лежит на такой окружности, проходящей через точки F и D и с центром в точке O', что градусная мера дуги CED равна градусной мере дуги FND. Отсюда и следует построение.

Проводим отрезок CF, равный и параллельный отрезку PQ заданному отрезку AB, затем строим треугольник $FO'D$, подобный треугольнику COD, причем берем точку O' между AB и FD. Теперь строим окружность, проходящую через

точки F и D, с центром в точке O'. Тогда N – точка пересечения этой окружности с прямой AB. Пересекая прямую ND с окружностью O, получим искомую точку E.

Задача имеет два, одно или ни одного решения, в зависимости от того, пересекает, касается или не пересекает окружность O' прямую AB.

Задача № 8. Указать такую систему окружностей в пространстве, чтобы:

I) никакие две окружности не пересекались;
2) через каждую точку пространства проходила бы окружность.

Решение.

Рассмотрим в пространстве числовую ось ℓ и на ней точки с целочисленными координатами: $\dots -n, -(n-1), \dots -1, 0, 1, \dots, n, \dots$; каждой точке $M(\rho)$ с координатой ρ сопоставим шар без границы, диаметрально-противоположными точками которого являются точки $M(\rho)$ и $M(\rho-1)$. Тело, полученное присоединением к этому открытому шару точки $M(\rho)$ обозначим $S(\rho)$. Согласно задаче 7 для седьмых классов (см.сборник "Математическая школа", вып. I2), $S(n)$ можно замостить окружностями так, чтобы выполнялись условия I) и 2), данные в условии задачи.

Теперь рассмотрим множество плоскостей, перпендикулярных оси ℓ. Либо они пересекаются с шарами по открытому кругу, либо в пересечении только одна точка (если плоскость проходит через точку оси с целой координатой).

Легко видеть, что плоскость без точки или без открытого круга можно замостить концентрическими окружностями, а

объединяя эти окружности с теми, которые покрывают шары, мы получим искомую систему.

Задача № 9. См. задачу № 8 для 7-х классов.

Задача № 10. См. задачу № 6 для 7-х классов.

Задача № 11. На плоскости нарисован параллелограмм с высотами a и b. Этот параллелограмм вписан в четырехугольник АВСД так, что на каждой стороне четырехугольника АВСД лежит ровно по одной вершине параллелограмма. Доказать, что четырехугольник АВСД можно покрыть полосой ширины $a+b$.

Решение. Назовём опорной полосой S_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ полосу, покрывающую четырехугольник АВСД, такую, что: а) одна кромка полосы проходит через сторону a_k четырехугольника АВСД; б) на другой кромке полосы лежит по крайней мере одна вершина АВСД.

Занумеруем теперь вершины параллелограмма числами от I до 4 так, чтобы:

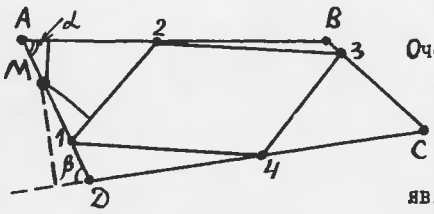
а) четными числами были занумерованы вершины при тупых (прямых) углах;

б) ширина опорной полосы S_2 (проходящей через сторону четырехугольника, содержащую вершину параллелограмма с номером 2) была не больше ширины опорной полосы S_4; в) обе вершины стороны АВСД, на которой лежит вершина параллелограмма с номером I, лежали на сторонах опорной полосы S_2.

Очевидно, что так занумеровать вершины параллелограмма можно.

Рассмотрим теперь сторону АВСД, содержащую первую вершину параллелограмма. Введем на этой стороне (см. рис. 11)

координаты. Пусть координата точки M равна x, тогда $AM = x$, $MD = a - x$ ($AD = a$).



Очевидно, сумма расстояний от точки M до сторон АВ и ДС равна $x(\sin\alpha - \sin\beta) + a\sin\beta$, т.е. является линейной функцией точки M.

Рис 11.

Для точек А и Д эта сумма равна, соответственно, ширине опорной полосы S_2 и S_4. Ясно, что значение рассматриваемой функции для вершины I не меньше, чем ширина полосы S_2.

С другой стороны, если повернуть стороны: АВ вокруг вершины 2, а ДС - вокруг вершины 4 так, чтобы эти стороны прошли через вершину 3, то сумма расстояний от вершины I до этих повернутых сторон станет равна $a+b$ и будет больше прежней суммы расстояний от вершины I.

Итак, значение нашей функции для вершины I не больше $a+b$, поэтому ширина S_2 не больше $a+b$, но S_2 уже покрывает АВСД, поэтому полоса ширины $a+b$, покрывающая АВСД, заведомо существует.

Задача № I2. Доказать, что в многоугольнике существует такая диагональ, которая полностью лежит внутри многоугольника и не имеет с его границей общих точек, отличных от концов. (Многоугольник - фигура, ограниченная замкнутой несамопересекающейся ломаной).

Решение.

Лемма. Существует такая вершина нашего многоугольника, что угол при ней будет меньше 180^0.

Для доказательства леммы рассмотрим на плоскости произвольную точку О и наиболее удаленную от неё вершину многоугольника (А). Тогда угол при вершине А будет меньше 180^0 (докажите сами).

Примечание: Эту лемму нельзя выводить из теоремы о сумме углов многоугольника, т.к. она доказывалась в школе лишь для выпуклых многоугольников или доказательство неявно опиралось на нашу задачу.

Пусть $\angle$ В А С при вершине А многоугольника меньше 180^0 (см. рис 12).

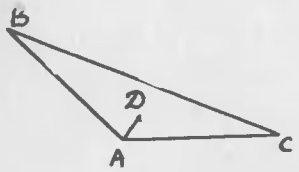


Рис 12.

Рассмотрим отрезок В С . Если он не удовлетворяет условию задачи, то в треугольнике А В С или на стороне В С находятся ещё вершины нашего многоугольника.

Пусть D - та из этих вершин, которая наиболее удалена от отрезка В С . Тогда А D - искомый отрезок (докажите сами).

Задача № 13. Дан произвольный треугольник ABC. Построить внутри него такую точку O, что $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$.

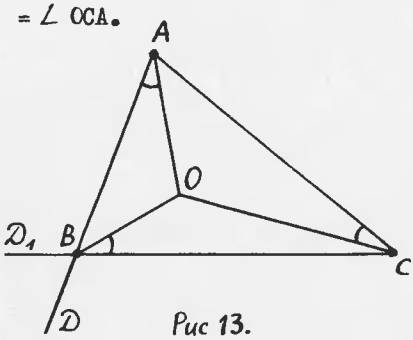


Рис 13.

Решение. пусть O – точка, удовлетворяющая условию. Тогда

$\angle OBD = \angle BAO + \angle BOA$,

$\angle OBD = \angle OBC + \angle CBD$;

по условию $\angle OBC = \angle BAO$,

следовательно, $\angle BOA = \angle CBD$

Обратно, если $\angle BOA = \angle CBD$ для некоторой точки O, то $\angle OBC = \angle BAO$. Теперь легко найти точку C.

Проведем через A и B окружность так, чтобы величина тупого вписанного угла, опирающегося на A B, была равна $\angle CBD$. Проведем окружность с аналогичным свойством через B C. Прямая B C будет касательной к I-й окружности, так как $\angle D'BA = \angle DBC$, а прямая A C – ко второй. Поэтому ясно, что эти окружности пересекутся внутри треугольника. Обозначим точку их пересечения через O. $\angle AOC$ будет равен третьему внешнему углу, так как сумма внешних углов треугольника 360^0.

Задача № 14. Лабиринт имеет форму прямоугольника со сторонами 3м. и 4м. и с проведенными диагоналями. В центре прямоугольника находится мышка, а в одной из вершин–кошка. Ходы лабиринта слишком узки для того, чтобы кошка или мышка могли в них развернуться. Диагональные ходы слишком узки

для кошки. В некоторый момент кошка и мышка начинают бегать по лабиринту: мышка – со скоростью $1\frac{м.}{сек.}$, кошка – со скоростью $10\frac{м}{сек.}$. Может ли мышка убежать от кошки (мышка и кошка могут поворачивать только в узлах лабиринта) ?

Решение.

Лемма . Мышка может бегать лишь по следующему маршруту: она бежит от центра к одной из вершин, затем обратно, оттуда – опять к какой-нибудь вершине и т.д. Доказательство следует из того, что мышка не может находиться на сторонах прямоугольника менее трех секунд, а кошка может обежать его за $\frac{14}{10} = 1\frac{2}{5}$ секунды.

Так как мышка пробегает путь от центра до вершины и обратно за целое число секунд (5) , то в любой момент, когда мышка находится в центре прямоугольника, кошка может находиться в одной из 14-ти точек A,B,C,Д,... И.

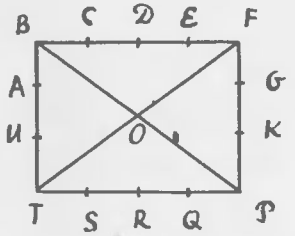


Рис 14.

Рассмотрим случай, когда кошка находится в одной из точек A,B,C,Д.

Рассмотрим, к примеру, случай, когда кошка находится в точке А.

В этом случае для того, чтобы добежать до точки T , кошка должна пробежать $(2 + 6к + 8m)$ или $(4 + 6к + 8m)$ метров, в зависимости от того, в какую сторону она бежит, то есть она не сможет добежать до вершины T за 2,5 секунды. Поэтому если мышка побежала к вершине T ,

то кошка её не поймает. Между прочим, в этом случае мышка может бежать и к вершине P. Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

Задача № 15. Доказать, что при всех n число:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$ не является целым.

Решение. Пусть 2^k – наибольшая степень двух, меньшая n, тогда $2^k \cdot 2 > n$ и если m делится на 2^k ($m = d \cdot 2^k$, $d \geq 2$), то $m > n$.

Следовательно, все числа $1, \ldots, n$, кроме 2^k, делятся на 2 в степени, меньшей k. Тогда дополнительные множители d_i ко всем этим числам будут четные, а d_{2^k}

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

будет нечетным, поэтому и числитель будет нечетным, а знаменатель четным, т.е. число не будет целым.

Задача № 16. Внутри квадрата со стороной 2 помещено семь квадратов со стороной 1. Доказать, что найдутся два из них, пересекающиеся по площади не менее $\frac{1}{7}$.

Решение. Предположим противное, то есть, что любые 2 квадрата пересекаются по площади $< \frac{1}{7}$. Возьмем 1-й квадрат; так как осталось 6 квадратов, то если мы уберем 1-й квадрат, освободится больше, чем $1 - \frac{6}{7}$ площади. Аналогично, если мы уберем 1-й и 2-й квадраты, то освободится больше $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}$ площади, если мы уберем все 7 квадратов, то окажется, что они покрывали площадь, большую $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{7}{7}$.

С другой стороны, эта площадь должна быть меньше площади большого квадрата.

Итак, должно быть:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \cdots + \frac{7}{7} < S \leq 4$$

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \cdots + \frac{7}{7} = 4.$$

Получили: $4 < S \leq 4$. Полученное противоречие решает задачу.

Задача № 18.*) В каждой вершине тетраэдра написано некоторое число, меньшее 1000000, причем сумма всех этих чисел равна 2000. Каждое число заменяется на среднее арифметическое чисел, стоящих в соседних вершинах, и эта операция повторяется тридцать раз. Доказать, что после этого каждое из чисел станет меньше, чем 1001.

Решение. Аналогично решению задачи № 15 для 7-х классов.

Задача № 19. Доказать, что $k^{8888} - k^{7777} + 1$ делится на $k^2 - k + 1$ при любом натуральном k .

Решение.

$$k^{8888} - k^{7777} + 1 = k^2 (k^3)^{\frac{8886}{3}} - k \cdot (k^3)^{\frac{7776}{3}} + 1 =$$

$$= k^2 \left((k^3)^{\frac{8886}{3}} - 1 \right) - k \left((k^3)^{\frac{7776}{3}} - 1 \right) + k^2 - k + 1.$$

Но известно, что $k^3 + 1 = (k+1)(k^2 - k + 1)$ и что $x^{2n} - 1$ делится на $x + 1$, откуда все сразу получается.

*) Решение задачи №17 см. на стр. 68.

Задача № 20. Каждая из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника площади I разделена на 7 частей и соответствующие точки соединены между собой. Найти площадь среднего четырехугольника (т.е. четвертого от края).

Решение. Обозначим: $S_{ACD} = S_1'$; $S_{ABD} = S_2'$; $S_{ABC} = S_1''$; $S_{BCD} = S_2''$; $S_{ABCD} = S$.

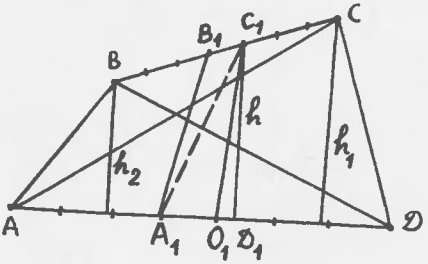


Рис 15.

Имеем:

$$S = S_1' + S_1'',$$

$$S = S_2' + S_2''.$$

Обозначим АД через a, а высоты, опущенные на АД из B, C_1, C – соответственно h_2, h, h_1.

$S_1 = пл.\ \triangle A_1C_1D_1$, $S_2 = пл.\ \triangle A_1B_1C_1$.

Легко подсчитать, что $h = \frac{3h_2 + 4h_1}{7}$, тогда из формул

$$S_1' = \frac{1}{2} a h_1;$$

$$S_2' = \frac{1}{2} a h_2;$$

$S_1 = \frac{1}{2} \frac{a}{7} h$ следует: $S_1 = \frac{3S_2' + 4S_1'}{49}$.

Проведя аналогичные рассуждения относительно стороны В С и опущенных на нее высот, получим: $S_2 = \frac{3S_2'' + 4S_1''}{49}$.

$пл.\ A_1B_1C_1D_1 = S_1 + S_2 = \frac{3(S_2' + S_2'') + 4(S_1' + S_1'')}{49} = \frac{3S + 4S}{49} = \frac{1}{7} S$.

Задача № 21. См. задачу № 18 для 7-х классов.

Задача № 22. Построить треугольник по точкам пересечения его биссектрисы, медианы и высоты, исходящих из одной вершины, с описанной окружностью.

Решение. Прежде всего, заметим, что бисоектриса угла треугольника и перпендикуляр, проведенный через середину противоположной этому углу стороны, пересекаются в точке, лежащей на описанной около треугольника окружности (эта точка делит дугу, стягиваемую стороной треугольника, пополам). Далее, биссектриса угла треугольника лежит между его высотой и медианой (докажите сами).

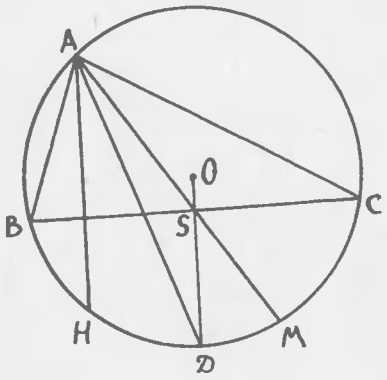


Рис 16.

Теперь опишем построение. Пусть H, D, M – точки пересечения соответственно высоты, биссектрисы и медианы о окружностью, O – центр этой окружности (построение окружности, проходящей через три точки H, D, M – известно).

Соединим точки Д и О, проведем через точку Н прямую, параллельную ОД, до пересечения её с окружностью в точке А ; затем соединим точки А и М и через точку пересечения S прямых АМ и ОД проведем прямую, перпендикулярную прямой ОД до пересечения с окружностью в точках В и С .

Треугольник АВС – искомый (доказательство и исследование проведите сами).

Задача I7. Имеется n предметов разного веса и весы без гирь. За одно взвешивание мы можем выяснить, какой из двух взвешиваемых предметов тяжелое другого. Наша задача состоит в том, чтобы упорядочить предметы по весу, т.е. найти самый тяжелый, второй по весу и т.д., до самого легкого.

а) Указать такой способ взвешивания для пяти предметов, который решал бы нашу задачу за 7 взвешиваний.

б) Доказать, что для десяти предметов требуется более 20 взвешиваний.

Решение.

а) Покажем, как за 7 взвешиваний упорядочить по весу 5 предметов $A_1, \ldots, A_5$.

I-ое взвешивание: сравним A_1 и A_2 и выберем тот, который тяжелее, пусть это будет, например, A_1. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Обозначим $(A_1, A_2) \to A_1$.

II-ое взвешивание $(A_3, A_4) \to A_3$.

III-е взвешивание $(A_1, A_3) \to A_1$.

IУ-е взвешивание (A_3, A_5). Если $A_3 > A_5$, то

У-е взвешивание $(A_4, A_5) \to A_4$. Тогда получится ситуация: (I): $A_1 > A_2$; $A_1 > A_3 > A_4 > A_5$. Если же $A_3 < A_5$, то сравним в У-ом взвешивании A_1 и A_5. Если $A_1 > A_5$, то получается ситуация, аналогичная (I): (I)': $A_1 > A_2$; $A_1 > A_5 > A_3 > A_4$.

Если же $A_1 < A_5$, то возникает ситуация: (2)

$$A_5 > A_1 > A_3 > A_4; \quad A_1 > A_2.$$

В ситуации (I) VI-ым взвешиванием надо сравнить A_2 и A_4, а в ситуации (2) - A_2 и A_3 . В результате после VI взвешивания возможна одна из ситуаций.

(3) $A_1 > A_3 > A_4 > A_5$; $A_4 > A_2$.

(4) $A_1 > A_3 > A_4 > A_5$; $A_1 > A_2 > A_4$.

(5) $A_5 > A_1 > A_3 > A_2$; $A_3 > A_4$.

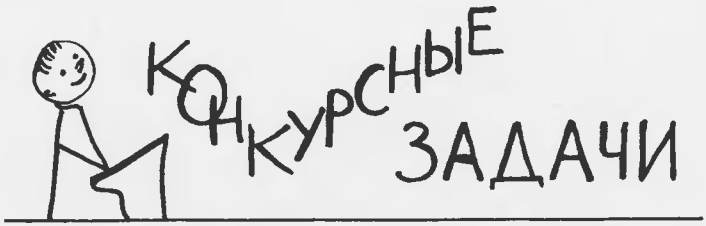
(6) $A_5 > A_1 > A_2 > A_3 > A_4$ - предметы упорядочены.

В ситуации (3) осталось сравнить A_5 и A_2, в (4) - A_2 и A_3 , в (5) - $A_$ и A_4 , что мы и сделаем седьмым взвешиванием.

б) Предположим, что удалось за N взвешиваний упорядочить n предметов по весу. Так как каждое взвешивание имеет 2 исхода (либо тяжелее предмет на левой чашке, либо на правой), то при N взвешиваниях количество всевозможных исходов не более 2^N. С другой стороны, каждому исходу N взвешиваний должен отвечать какой-то один определенный порядок предметов по весу. Так как всего таких порядков $n!$, то должно выполняться неравенство:

(I) $2^N \geq n!$

При $N=20$, $n=10$ имеем: $2^{20} = 1.048.576$, $10! = 3.628.800$, и неравенство (I) не имеет место. Значит, за 20 взвешиваний IO предметов нельзя упорядочить по весу.



7 класс

9. Имеется целое тысячезначное число А, все цифры которого, за исключением одной,пятёрки. Доказать, что не существует такого целого числа В, что $B^2 = A$, т.е. А не является полным квадратом.

I0. Дан круг и две точки внутри него. Доказать, что через эти точки можно провести окружность так, чтобы она лежала внутри данного круга.

II. Найти все такие простые числа р, что /8 p^2 + I/-простое.

I2. Пусть $P=K^n$, где К и n - натуральные числа. Доказать, что Р есть сумма К последовательных нечетных чисел.

I3. Точка О - центр квадрата АВСД. Найти геометрическое место таких точек Π, которые можно заключить в круг, целиком лежащий внутри квадрата и содержащий точку О.

I4. Ученик седьмого класса Петя Иванов придумал новую теорему:

Если n - натуральное число, то n^2-n+41 - простое. Сможет ли Петя доказать свою теорему?

I5. В каждой вершине треугольника написано некоторое число меньшее I000000. причем сумма всех этих чисел равна 3000. Каждое число заменяется средним арифметическим чисел, стоящих в соседних вершинах, и эта операция повторяется тридцать раз. Доказать, что после этого каждое из чисел станет меньше, чем I00I.

I6. Доказать, что любую правильную дробь $\frac{p}{q}$ можно представить в виде: $\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 \cdot n_2} + \dots + \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k}$, где $n_i > 1$.

Например: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$.

I7. В каждой клетке бесконечной шахматной доски написано число, причем числа, стоящие на одной вертикали (любой) равны между собой. Каждое число равно сумме четырех соседних. Найти все такие способы записи чисел.

I8. Дано семь точек на плоскости, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединяется отрезком. Какое наибольшее и наименьшее число точек пересечения могут иметь эти отрезки?

I9. Доказать, что если число делится на 99, то сумма его цифр не меньше I8.

20. Все двухзначные числа, не оканчивающиеся нулем, выписывают одно число за другим так, что каждое следующее число начинается с последней цифры предыдущего. Из многозначных чисел, которые таким образом можно получить, выбирают наименьшее и наибольшее. Найти их сумму.

21. Дан треугольник и две точки внутри него. Как кратчайшим путем пройти из одной точки в другую, побывав на каждой стороне треугольника?

22. На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый школьник решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Доказать, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну задачу и все задачи были рассказаны.

23. Дан выпуклый четырехугольник АВСД. Точки Е и М – середины АД и ВС. Доказать, что ЕМ = $\frac{1}{2}$ (АВ+СД) тогда и только тогда, когда АВ $\parallel$ СД.

24. Доказать, что на плоскости нельзя расположить К точек так, чтобы каждая из них была серединой отрезка, соединяющего какие-то две другие точки.

25. Дан треугольник АВС. Найти такую точку, что если ее отразить симметрично от любой стороны треугольника, то она попадет на описанную окружность.

26. Доказать, что дробь $\frac{2n^2-1}{2n+1}$ несократима при любом n.

8 класс

II. На плоскости нарисован параллелограмм с высотами a и b; этот параллелограмм вписан в четырехугольник АВСД так, что на каждой стороне четырехугольника АВСД лежит ровно по одной вершине параллелограмма. Доказать, что четырехугольник АВСД можно покрыть полосой ширины $a+b$.

I2. Доказать, что в многоугольнике существует такая диагональ, которая полностью лежит внутри многоугольника и не имеет с его границей общих точек, отличных от концов. /Многоугольник - фигура, ограниченная замкнутой несамопересекающейся ломаной).

I3. Дан произвольный треугольник АВС. Построить внутри него такую точку О, что $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$.

I4. См.задачу № I4 для 9-I0 классов ("Математическая школа", выпуск X).

I5. Доказать, что при всех n число:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$ не является целым.

I6. Внутри квадрата со стороной 2 помещено семь квадратов со стороной 1. Доказать, что найдутся два из них, пересекающиеся по площади не менее $\frac{1}{7}$.

I7. Имеется n предметов разного веса и весы без гирь. За одно взвешивание мы можем выяснить, какой из двух взвешиваемых предметов тяжелее другого. Наша задача состоит в том, чтобы упорядочить предметы по весу, т.е. найти самый тяжелый, второй по весу и т.д. до самого легкого.

а/ указать такой способ взвешивания для пяти предметов, который решал бы нашу задачу за 7 взвешиваний.

б/ доказать, что для десяти предметов потребуется более 20 взвешиваний.

I8. В каждой вершине тетраэдра написано некоторое число, меньшее I000000, причем сумма всех этих чисел равна 4000. Каждое число заменяется на среднее арифметическое чисел, стоящих в соседних вершинах, и эта операция повторяется тридцать раз. Доказать, что после этого каждое из чисел станет меньше, чем I00I.

I9. Доказать, что $K^{8888} \cdot K^{7777} + I$ делится на K^5-K+I при любом натуральном K.

20. Каждая из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника площади I разделена на 7 частей и соответствующие точки соединены между собой. Найти площадь среднего четырехугольника (т.е. четвертого от края).

2I. Дано семь точек на плоскости, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая пара точек соединяется отрезком. Какое наибольшее и наименьшее число точек пересечения могут иметь эти отрезки?

22. Построить треугольник по точкам пересечения его биссектрисы, медианы и высоты, исходящих из одной вершины, с описанной окружностью.

23. В марсианском языке три буквы: У, А и I. Буква I - особая. Сказанная сама по себе, она означает некоторое слово, но будучи написана в начале, в конце или где-нибудь в середине другого слова, она не меняет значения этого слова. Известно, что если марсианин говорит три раза подряд букву У или пять раз подряд букву А, это значит то же самое, что он сказал один раз букву I. /например УУУУ означает IУ, или просто У/. Кроме того, некоторые марсиане вместо ААААУ предпочитают говорить УА, так что эти слова не различаются. Сколько различных слов в марсианском языке?

24. Доказать, что при любом натуральном К число 1967 К + 3 не является полным кубом.

25. Найти все действительные решения системы

$$X^4 - 17 = У^4 - 7 = С^4 + 19 = И^4 + 5 = ХУСИ.$$

26. Имеется два набора из n положительных чисел $X_1, \ldots, X_n$ и $У_1, \ldots, У_n$. Разрешается переставлять между собой числа из одного набора. Первое число первого набора умножается на первое число второго набора, второе - на второе и т.д., и все результаты складываются. Как добиться, чтобы эта сумма была наибольшей?

27. При каких k верна теорема:

из того, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ следует, что

$$\frac{1}{a^k}+\frac{1}{b^k}+\frac{1}{c^k}=\frac{1}{a^k+b^k+c^k}?$$

28. Даны три прямые K_1, K_2, K_3. Найти геометрическое место таких точек M, что расстояние от M до K_1 равно сумме расстояний от M до K_2 и от M до K_3.

29. Дан треугольник ABC и точка O, лежащая на стороне BC. Пусть K - произвольная прямая, проходящан через точку O и пересекающая прямую AB в точке P, а прямую AC - в точке M. Вокруг треугольников BOP и COM описываются онружности. Найти геометрическое место точек их пересечения.

30. В стране Гомологии 1966 городов. Между каждыми двумя городами курсирует 1 самолет. Эти самолеты принадлежат могущественной семье Морфизмов: Гомо Морфизму, Экве Морфизму, Авто Морфизму, Моно Морфизму и т.д. Любые два маршрута, принадлежащие одному Морфизму, имеют общий город. Скольно членов в семье Морфизмов?

31. Заданы прямые, перпендикулярные к сторонам многоугольника и проходящие через их середины. Построить многоугольник.

32. Отрезок AB имеет длину I. Окружим его многоугольником P так, чтобы двигая AB по плоскости и не выпуская при этом его концами за контур P, можно было поменять местами концы отрезка AB.

а/ Пусть многоугольник P выпуклый. Найти наименьшее значение его площади.

б/ Может ли невыпуклый многоугольник площади половина удовлетворять условию?

9-10 класс

I5. Рассмотрим квадрат. Внутри квадрата находится несколько равных, попарно не пересекающихся кругов. Доказать, что квадрат можно разбить на выпуклые многоугольники так, что в каждом из них будет содержаться ровно по одному кругу.

I6. Имеется многочлен $P(x)$ степени n, который в каждой целой точке принимает целое значение. Доказать, что все коэффициенты многочлена $n!\,P(x)$ - целые.

I7. В каждой вершине пятиугольника написано некоторое число, меньшее тысячи, причем сумма всех этих чисел равна нулю. Каждое число заменяется полусуммой двух чисел, написанных в соседних вершинах, и эта операция повторяется тысячу раз. Доказать, что после этого каждое из чисел будет меньше I.

I8. В языке племени Мумбо-Юмбо имеется три буквы Г, Ы и Е. Буква Е - особая. Сказанная сама по себе, отдельно, она означает некоторое слово, но будучи приписана в начале, в конце или где-нибудь в середине к другому слову, она не меняет значения этого слова. Известно, что когда людоед говорит ГГГ или ЫЫ или же ГЫГЫГЫ, то это то же самое, что Е (так что, например, ГГГГ значит ЕГ, или просто Г). Доказать, что какова бы ни была численность этого племени, каждым двум людям можно дать разные имена.

I9. Дан выпуклый шестиугольник АВСДЕF. Известно, что каждая из его диагоналей АД, ВЕ, СF разбивает этот шестиугольник на 2 равновеликих четырехугольника. Доказать, что диагонали АД, ВЕ, СF пересекаются в одной точке.

20. При каких К верна теорема: из того, что

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A+B+C}$$ следует, что

$$\frac{1}{A^k}+\frac{1}{B^k}+\frac{1}{C^k}=\frac{1}{A^k+B^k+C^k}\ ?$$

2I. См.задачу № 28 для 8-х классов.

22. См.задачу № 29 для 8-х классов.

23. См.задачу № 3I для 8-х классов.

24. Доказать, что на сфере радиуса I м нельзя расположить 20000 любыми точек так, чтобы расстояние между двумя было не меньше I см. Доказать, что можно расположить 40000 точек так, чтобы они удовлетворяли этому условию.

25. Пусть на сфере радиуса I м расположено К точек так, что расстояние между любыми двумя *не* меньше I см и так, что нельзя добавить ни одной точки с сохранением этого условия. Берется многогранник с вершинами в этих точках. Доказать, что площадь любой его грани не меньше,чем 0,4 см.

26. Пусть каждой точке М плоскости поставлена в соответствие точка Р (М) той же плоскости так, что:

I) Если M_I и M_2 различные точки, то $P(M_I)$, $P(M_2)$ - различные точки.

2) Если N - любая точка, то существует точка М, такая, что $N = P(M)$.

3) Если $\angle ABC$, прямой, то и $\angle P(A)\,P(B)\,P(C)$ прямой. Найти все такие преобразования.

27. Из всех квадратов, которые можно поместить в куб со стороной I, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

28. См.задачу № 34 для 8 класса.

29. Каждому действительному члену Х поставлено в соответствии действительное число К(Х). Известно, что для любых Х и Ц

а/ $K(X+Ц) = (X) + K(Ц)$

б/ $K(X)\,K(Ц) = K(XЦ)$.

Доказать, что $K(X) = X$ или $K(X) = 0$

30. Две окружности называются ортогональными, если касательные к ним в точке пересечения перпендикулярны.Рассмотрим все окружности, проходящие через две данные различные точки O_I и O_2 . Доказать, что существует бесконечно много окружностей, ~~орто~~ональных всем данным.

По традиции мы публикуем материалы вступительных экзаменов в ведущие вузы страны.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике, предложенные в 1966 году в Московском Физико-Техническом институте. На решение задач отводилось 5 астрономических часов.

ГОТОВИМСЯ В ВУЗ

ВАРИАНТ 7.I.

I. Равнобочная трапеция, у которой угол при основании равен 60^0, описана около окружности. В каком отношении прямая, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, делят площадь трапеции ?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} ctg\,x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2\sin y \cdot \sin(x+y) = \cos x. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B против течения реки отправляется пароход. Одновременно из B в A отправляется лодка, которая, пройдя $\frac{1}{3}$ расстояния от B до A, встречает пароход. В пункте B пароход сразу поворачивает обратно, обгоняет лодку и прибывает в A в момент, когда лодка находится на расстоянии 20 км от A. Если бы скорость лодки относительно воды была в три раза больше, то первая встреча произошла бы на середине пути между A и B. Определить расстояние между пунктами A и B.

4. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна стороне основания. Внутри пирамиды расположены два шара: шар радиуса r касается всех боковых граней; шар радиуса $2r$ касается основания и двух смежных боковых граней; оба шара касаются друг друга внешним образом. Найти апофему этой пирамиды.

6к-1355

ВАРИАНТ 7.2.

I. Решить уравнение:

$$5\cos 3x + 3\cos x = 3\sin 4x .$$

2. Из пункта A в пункт B отправляется автобус, а из пункта B в пункт A - поезд. Если поезд отправится на 3 часа позже автобуса, то они встретятся на середине пути . А если поезд отправится на I час I2 минут позже автобуса , то до их встречи автобус успеет пройти 2/5 всего расстояния от A до B . Через какое время они встретятся, если отправятся одновременно ?

3. В остроугольном треугольнике две высоты равны 3 см и $2\sqrt{2}$ см, а их точка пересечения делит третью высоту в отношении 5:I , считая от вершины треугольника. Найти площадь треугольника.

4. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающегося построенной сферы.

ВАРИАНТ 7.3

I. В треугольнике ABC сторона AB равна 2 см. AC – 5 см, BC – 6 см. Найти расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC.

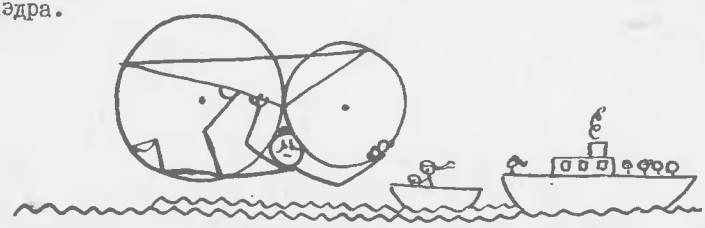
2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg}3x = 3\operatorname{tg}2x, \\ 2\sin x\cos(x-y) = \sin y. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B против течения реки отправляется пароход. Одновременно из B в A стправляется лодка и через 3/8 всего раостояния от B до A встречается с пароходом. В пункте B пароход сразу поворачивает обратно и прибывает в A одновременно с лодкой. Если бы скорость лодки относительно воды была в два раза больше, то в пункт A она прибыла бы на I час IO минут раньше парохода. Через какое время после отправления пароход возвратился в пункт A ?

4. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены два шара радиусов $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем один шар вписан в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A, а другой – в трехгранный

угол с вершиной в точке B . Найти длину ребра этого тет - раэдра.



ВАРИАНТ 7.4.

I. Решить уравнение:

$$1+\sin 2x+2\sqrt{3}\cos 3x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x.$$

2. Окружности радиусов r и R касаются друг друга внутренним образом. Найти сторону правильного треугольника, у которого одна вершина находится в точке касания данных окружностей, а две другие лежат на разных данных окружностях.

3. Катер и пароход, отправляясь одновременно из пункта A в B по направлению течения реки, осуществляют безостановочное движение между A и B . За один рабочий день катер делает 5 рейсов, а пароход - 9 рейсов (рейс - движение от A до B и обратно). Через 20 минут после начала движения, когда катер прошел 5/6 всего расстояния от A до B , происходит их первая встреча. Определить продолжительность рабочего дня.

4. Внутри правильного тетраэдра с ребром a лежат четыре равных шара так, что каждый касается трех других шаров и

грех граней тетраздра. Определить радиус этих шаров.

ВАРИАНТ 7.5.

I. Решить уравнение :

$$tg\,2x+\frac{1}{\sin x}=ctg\,x+\frac{1}{\sin 5x}.$$

2. В трапеции основания равны a и b , диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α Найти площадь трапеции.

3. Число $1+\sqrt{2}$ - является корнем уравнения

$$x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0.$$

Найти все остальные корни этого уравнения, если известно, что a и b - рациональные числа.

4. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что одно ребро его лежит на средней линии основания пирамиды, вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности пирамиды, центр куба лежит на высоте пирамиды. Найти отношение объема пирамиды к объему куба.

ВАРИАНТ 7.6.

I. Решить уравнение:

$$\sin x + \sin 2x + 2\sin x \sin 2x = \\ = 2\cos x + \cos 2x.$$

2. В прямоугольном треугольнике ABC катет AB равен 3 см, катет AC равен 6 см. Центры окружностей радиусов I см, 2 см и 3 см находятся соответственно в точках A, B, C. Найти радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot 9^{y-x} + 2y \cdot 3^{-x-y} = 8 \cdot 3^{-2x+y}, \\ 3x \cdot 3^{2y+x} + 2y \cdot 3^{2x-y+1} = 72 \cdot 9^{x-y}. \end{cases}$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна a, высота равна $2\sqrt{2}a$. Через вершину A параллельно диагонали BD оонования пирамиды проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30^0. Найти площадь сечения.

ВАРИАНТ 7.7.

I. Решить уравнение:

$$\operatorname{ctg} 2x + 3\operatorname{tg} 3x = 2\operatorname{tg} x + \frac{2}{\sin 4x}.$$

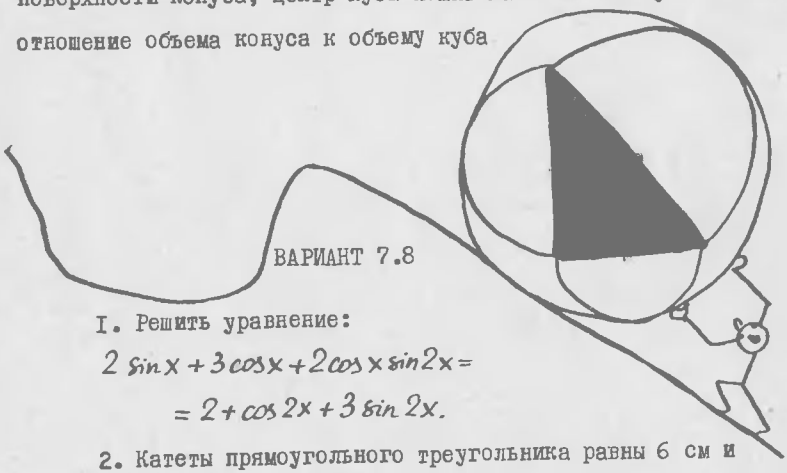
2. Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что AO равно $\sqrt{3}\,MO$, NO равно $(\sqrt{3}-1)\,BO$. Найти углы треугольника ABC.

3. Число $1+\sqrt{3}$ – корень уравнения

$$x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0.$$

Найти остальные корни этого уравнения, если a и b – рациональные числа.

4. Внутри прямого кругового конуса расположен куб так, что одно ребро куба лежит на диаметре основания конуоа, вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, центр куба лежит на высоте конуса. Найти отношение объема конуса к объему куба



ВАРИАНТ 7.8

I. Решить уравнение:

$$2\sin x+3\cos x+2\cos x\sin 2x=$$
$$=2+\cos 2x+3\sin 2x.$$

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. На всех его сторонах как на диаметрах построены полуокружности, лежащие вне треугольника. Найти радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y - 2^{2x+y} = 2, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$$

4. Ребро правильного тетраэдра $SABC$ равно a. Через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30°. Найти площадь сечения.

ВАРИАНТ 7.9

I. Из пункта A в пункт B одновременно отправляются пешеход и велосипедист. Доехав до B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через I час после начала движения. После встречи пешеход продолжает идти в B, а велосипедист поворачивает и тоже едет в B. Доехав до B, велосипедист снова поворачивает обратно и встречает пешехода через 40 минут после первой встречи. За какое время пешеход пройдет расстояние от A до B?

2. К двум непересекающимся окружностям проведены общие касательные прямые. Угол между внешними касательными равен α, а угол между внутренними касательными равен β. Найти угол между прямыми, проведенными из центра окружности большего радиуса, касательно ко второй окружности.

3. Внутри прямого кругового цилиндра, высота которого равна $3r$, лежат три равных шара радиуса r так, что каждый шар касается двух других шаров и боковой поверхности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания цилиндра, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x \cos 2y + \sin y \cos 2x + 2\cos x = 1, \\ \cos 2x + 3\cos 2y + 8\sin y = 8 + 4\sin x \cos y. \end{cases}$$

ВАРИАНТ 7.10

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \lg_2 (y-x) = \lg_8 (3y-5x), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

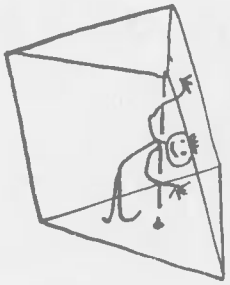
2. В трапеции средняя линия равна 7 см, высота равна $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ см, а угол между диагоналями против основания равен 120^0. Найти диагонали этой трапеции.

3. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре BD расположена точка M так, что $3DM = a$. Прямой круговой конус расположен так, что его вершина нахо-

дится на середине ребра AC, а окружность основания проходит через точку M и пересекает ребра AB и BC. Найти радиус основания этого конуса.

4. Решить уравнение:

$$\cos^2 3x + \frac{1}{4}\cos^2 x = \cos 3x \cdot \cos^4 x.$$



ВАРИАНТ 7.II

I. Решить систему уравнений:

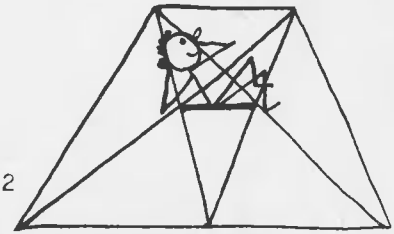
$$\begin{cases} \lg_2 x \cdot \lg_x (x-3y) = 2, \\ xy^{\lg_x y} = y^{\frac{5}{2}}. \end{cases}$$

2. Стороны параллелограмма равны 3 см и 2 см, а угол между ними равен $\arccos\frac{5}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят параллелограмм на четыре равновеликие части. Найти длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

3. В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной a. Прямая, соединяющая одну из вершин верхнего основания с центром нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Известно, что внутрь этой призмы можно поместить шар, касающийся всех граней призмы. Найти боковое ребро призмы.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos 2x + \sin y = 1, \\ 2\cos 2x + 8\cos x \cos y + 7 = 4\sin y. \end{cases}$$



ВАРИАНТ 7.12

I. Найти все вещественные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2} = 5. \end{cases}$$

2. Основания равнобочной трапеции равны a и b $(a>b)$. Прямые, соединяющие середину большего основания с концами меньшего основания, пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

4. Решить уравнение:

$$\sin^4 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cos^4 x.$$

Подп. к печати 10/У-67г. Л-41927. Ф. 60 x 90/16
Физ.п.л. 5,75. Уч.-изд.л. 3,96. Зак. 1355. Тир. 1000
Цена 11 коп.

Отпечатано на ротапринтах в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.